

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

Abril 2021

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 2}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 3x = 0 \implies (0, 0)$ con OX .
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.

c)

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
signo	-	+

d) $f(-x) = -f(x) \implies$ la función es impar.

e) Asíntotas:

- **Verticales:** No hay
- **Horizontales:** $y = 0$ ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + 2} = 0$
- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f) $f'(x) = -\frac{3(x^2 - 2)}{(x^2 + 2)^2} = 0 \implies x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

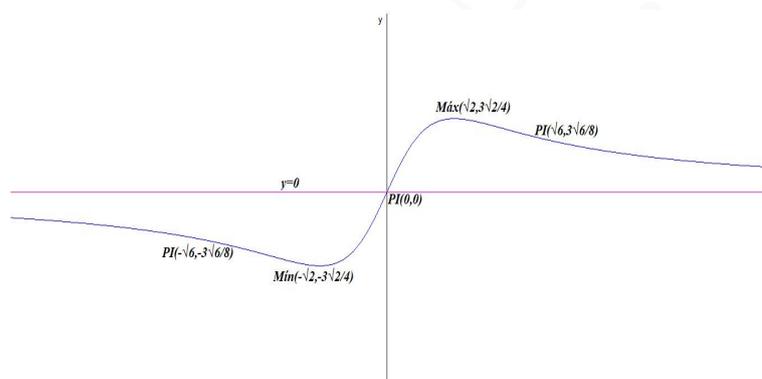
La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$, creciente en el intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ con un mínimo en $\left(-\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ y un máximo en $\left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

g) $f''(x) = \frac{6x(x^2 - 6)}{(x^2 + 2)^3} = 0 \implies 6x(x^2 - 6) = 0 \implies x = \pm\sqrt{6}, x = 0$

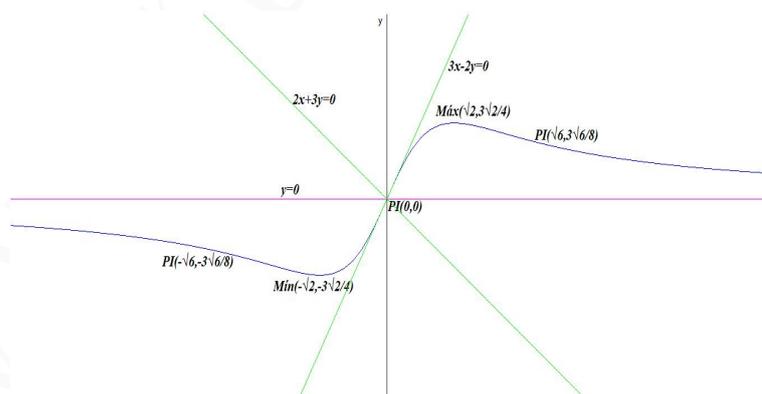
	$(-\infty, -\sqrt{6})$	$(-\sqrt{6}, 0)$	$(0, \sqrt{6})$	$(\sqrt{6}, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	convexa \frown	cóncava \smile	convexa \frown	cóncava \smile

Convexa: $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (0, \sqrt{6})$, cóncava: $(-\sqrt{6}, 0) \cup (\sqrt{6}, \infty)$ y con puntos de inflexión en $(-\sqrt{6}, -\frac{3\sqrt{6}}{8})$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{6}, \frac{3\sqrt{6}}{8})$.

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$:
Como $m = f'(0) = 3/2$ tenemos que



Recta Tangente : $y = \frac{3}{2}x$

Recta Normal : $y = -\frac{2}{3}x$

Como $f(0) = 0$ las rectas pasan por el punto $(0, 0)$.