Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

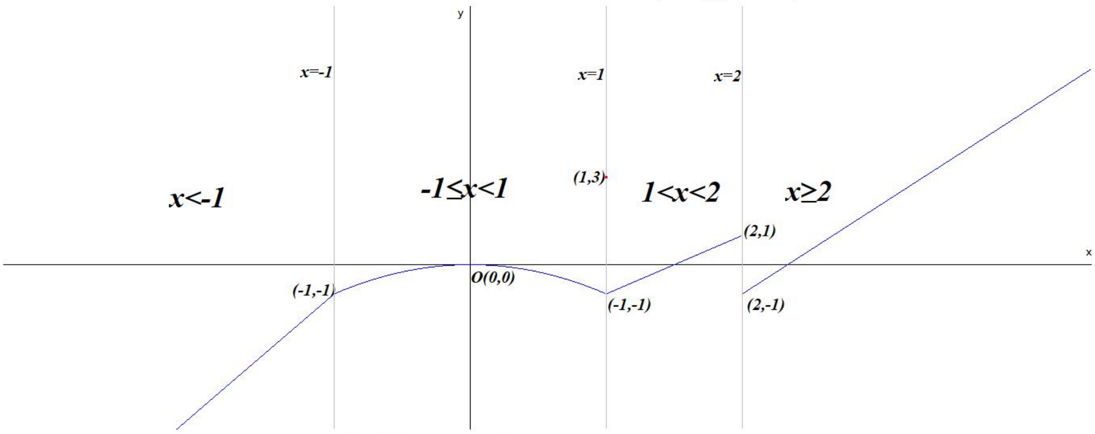
Marzo 2021

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 4x+3 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2x-3 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 3x-7 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.

Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 5bx + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x^2 + bx - 5a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2 - 5bx + 2) = a - 5b + 2$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (2x^2 + bx - 5a) = 2 + b - 5a$$

$$a - 5b + 2 = 2 + b - 5a \Longrightarrow a - b = 0$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 5b & \text{si} \quad x < 1 \\ 4x + b & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 2a - 5b;\ \ f'(1^+) = 4 + b \Longrightarrow 2a - 5b = 4 + b \Longrightarrow a - 3b = 2$$

$$\left\{\begin{array}{l} a - b = 0 \\ a - 3b = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \end{array}\right.$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \frac{x-a}{3} & \text{si} & x < -1 \\ x + 2b & \text{si} & -1 \le x < 1 \\ \frac{ax+3b}{2} & \text{si} & x \ge 1 \end{array}\right.$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x-a}{3} = \frac{-1-a}{3} \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} (x + 2b) = -1 + 2b \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{-1-a}{3} = -1 + 2b \Longrightarrow a + 6b = 2$$

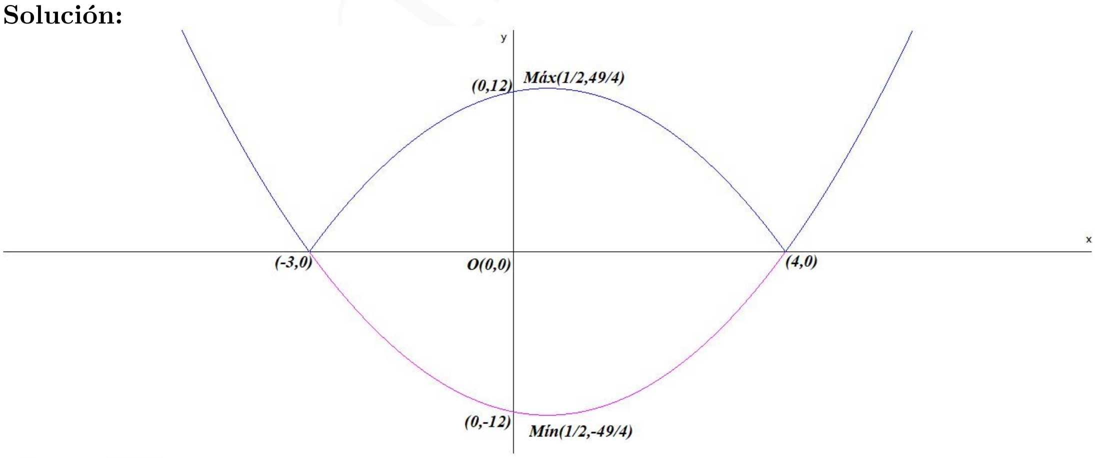
Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x + 2b) = 1 + 2b \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{ax+3b}{2} = \frac{a+3b}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{a+3b}{2} = 1 + 2b \Longrightarrow a - b = 2$$

$$\left\{\begin{array}{l} a + 6b = 2 \\ a - b = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - x - 12|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x) = x^2 - x - 12 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1/2$:

x	y
0	-12
-3	0
4	0
$1/2$	$-49/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{1}{2}, \frac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - x - 12 & \text{si} & x \le -3 \\ -(x^2 - x - 12) & \text{si} & -3 < x \le 4 \\ x^2 - x - 12 & \text{si} & 4 \le x \end{array} \right.$$

f es continua en $x = -3$:

$$\lim_{x \longrightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -3^-} (x^2 - x - 12) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -3^+} (-x^2 + x + 12) = 0$$

$$f(-3) = 0$$

y f es continua en $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^-} (-x^2 + x + 12) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^+} (x^2 - x - 12) = 0$$

$$f(4) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 1 & \text{si} & x \le -3 \\ -2x + 1 & \text{si} & -3 < x \le 4 \\ 2x - 1 & \text{si} & 4 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -3$: $f'(-3^-) = -7$ y $f'(-3^+) = 7$, luego no es derivable en $x = -3$.
Derivabilidad en $x = 4$: $f'(4^-) = -7$ y $f'(4^+) = 7$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 7\}$.

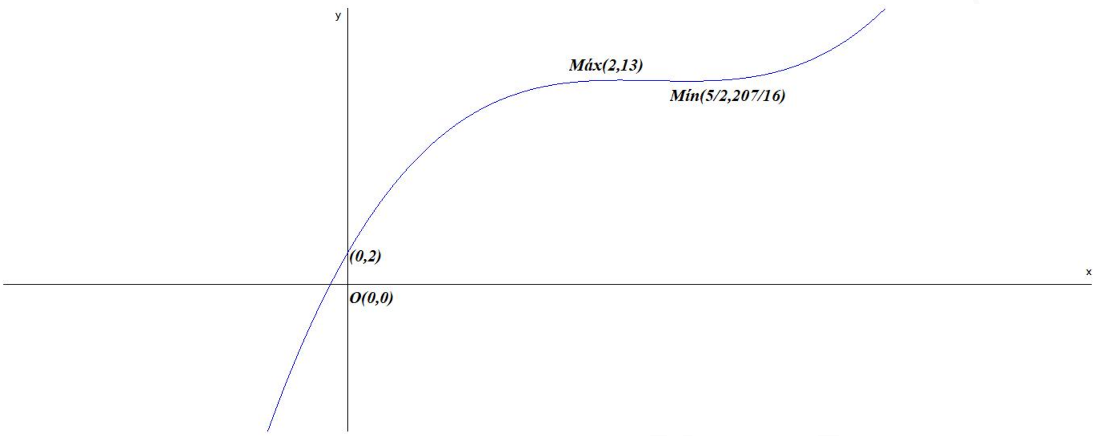
Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 + 5ax^2 - 2bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 9)$. Decidir de que extremo se trata.

Solución:

$$f(x) = x^3 + 5ax^2 - 2bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 10ax - 2b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \\ f(2) = 9 \Longrightarrow 20a - 4b - c + 8 = 9 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 20a - 2b + 12 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -27/20 \\ b = -15/2 \\ c = 2 \end{array} \right.$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - \frac{27}{4}x^2 + 15x + 2$
$f'(x) = 3x^2 - \frac{27}{2}x + 15$ y $f''(x) = 6x - \frac{27}{2} \Longrightarrow f''(2) = 12 - \frac{27}{2} = -\frac{3}{2} < 0 \Longrightarrow x = 2$ es un máximo.


y
x
Máx(2,13)
Mín(5/2,207/16)
(0,2)
O(0,0)