Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Abril 2021

Problema 1 (2 puntos) Encontrar todas las ecuaciones de la recta cuya ecuación general es $x - 7y + 1 = 0$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (7, 1) \\ A(-1, 0) \end{cases}$$

- Vectorial: $(x, y) = (-1, 0) + \lambda(7, 1)$
- Paramétrica: $\begin{cases} x = -1 + 7\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y}{1}$
- General: $x - 7y + 1 = 0$
- Explícita: $y = \dfrac{1}{7}x + \dfrac{1}{7}$
- Punto pendiente: $y = \dfrac{1}{7}(x + 1)$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m = \tan\alpha = \dfrac{1}{7} \Longrightarrow \alpha = 8^\circ 7' 48''$

Problema 2 (3 puntos) Sea el punto $A(1, -3)$ y la recta $r : 5x - 2y + 1 = 0$. Se pide calcular:

a) (0,5 puntos) Una recta paralela a r que pase por el punto A.

b) (0,5 puntos) Una recta perpendicular a r que pase por el punto A.

c) (1 punto) El punto A'' simétrico de A respecto de la recta r.

d) (1 punto) Las rectas bisectrices de r con $s : 2x - 5y + 6 = 0$.

Solución:

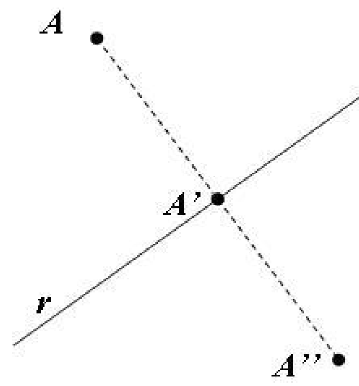
a) $5x - 2y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 5 + 6 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -11$. La recta buscada es $h : 5x - 2y - 11 = 0$

b) $2x + 5y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 2 - 15 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 13$. La recta buscada es $t : 2x + 5y - 13 = 0$

c) Calculamos A'' simétrico de A respecto de la recta r:

- Calculamos una recta t perpendicular a r y que pase por A, calculada en el apartado anterior.
- Calculamos el punto de corte entre r y t:

$$\begin{cases} r : 5x - 2y + 1 = 0 \\ t : 2x + 5y - 13 = 0 \end{cases} \Longrightarrow A'\left(\frac{21}{29}, \frac{67}{29}\right)$$



- El punto A' calculado es el punto medio entre el punto A y el punto A'' que tenemos que calcular:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = 2\left(\frac{21}{29}, \frac{67}{29}\right) - (1, -3) = \left(\frac{13}{29}, \frac{221}{29}\right)$$

d)

$$d(P, r) = d(P, s) \Longrightarrow \frac{|5x - 2y + 1|}{\sqrt{29}} = \frac{|2x - 5y + 6|}{\sqrt{29}} \Longrightarrow |5x - 2y + 1| = |2x - 5y + 6|$$

- $5x - 2y + 1 = 2x - 5y + 6 \Longrightarrow 3x + 3y - 5 = 0$
- $5x - 2y + 1 = -2x + 5y - 6 \Longrightarrow x - y + 1 = 0$

Problema 3 (3 puntos) Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-8, 0)$, $B(0, 6)$ y $C(-2, 0)$. Obtener su centro, su radio.

Solución:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} -8m + p = -64 \\ 6n + p = -36 \\ -2m + p = -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 10 \\ n = -26/3 \\ p = 16 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + 10x - \frac{26}{3}y + 16 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m = -2a = 10 \Longrightarrow a = -5 \\ n = -2b = -\frac{26}{3} \Longrightarrow b = \frac{13}{3} \\ p = 16 = a^2 + b^2 - r^2 \Longrightarrow r = \frac{5\sqrt{10}}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro} = \left(-5, \frac{13}{3}\right), \quad r = \frac{5\sqrt{10}}{3}$$

Problema 4 (2 puntos) Encontrar los puntos de la recta

$$r : \frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 1}{1}$$

que se encuentran a una distancia 7 del punto $P(1,3)$.
Solución:
Construimos la circunferencia de centro P y radio 7:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=49$$

Cortamos r con esta circunferencia; para ello ponemos r en parámetricas: $r:\left\{\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=-1+\lambda \end{array}\right.$ y sustituimos en la circunferencia:

$$(2-\lambda-1)^2+(-1+\lambda-2)^2=49 \Longrightarrow 2\lambda^2-8\lambda-39=0 \Longrightarrow \lambda_1=6,85,\ \ \lambda_2=-2,85$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1=6,85 \Longrightarrow P_1(-4,85;5,85) \\ \lambda_2=-2,85 \Longrightarrow P_2\,(4,85;-3,85) \end{array}\right.$$