Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2021

Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-4,0)$, $B(0,8)$ y $C(4,0)$. Obtener su centro, su radio.

Solución:

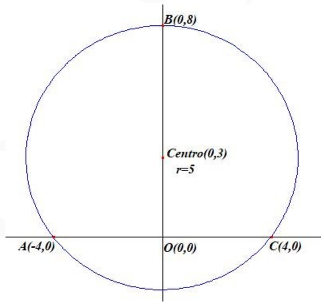
$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

$$\left\{\begin{array}{c} -4m+p=-16 \\ 8n+p=-64 \\ 4m+p=-16 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=0 \\ n=-6 \\ p=-16 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2-6y-16=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m=-2a=0 \Longrightarrow a=0 \\ n=-2b=-6 \Longrightarrow b=3 \\ p=-16=a^2+b^2-r^2 \Longrightarrow r=5 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro}=(0,3)\,,\ \ r=5$$



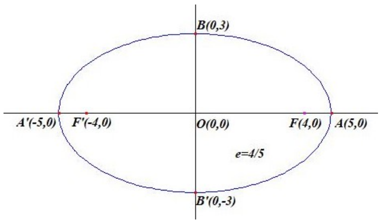
Problema 2 Sea $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ la ecuación de una elipse horizontal centrada en el origen de coordenadas. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$a^2=25 \Longrightarrow a=5,\quad b^2=9 \Longrightarrow b=3$$

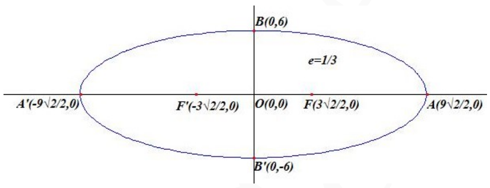
$$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c=4 \quad e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$$

Eje Mayor= $2a=10$
Eje Menor= $2b=6$
Distancia Focal= $2c=8$
Excentricidad= $e=\dfrac{4}{5}$
Vértices: $A(5,0)$, $A'(-5,0)$, $B(0,3)$, $B(0,-3)$
Focos: $F\,(4,0)$, $F'\,(-4,0)$
Ecuación general: $9x^2+25y^2=225$



Problema 3 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 6 cm y tiene una excentricidad $e = \dfrac{1}{3}$. Calcular los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:



$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Longrightarrow a = 3c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 9c^2 = 36 + c^2 \Longrightarrow c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$a = 3c = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

Eje Mayor$= 2a = 9\sqrt{2}$
Eje Menor$= 2b = 12$
Distancia Focal$= 2c = 3\sqrt{2}$
Excentricidad$= e = \dfrac{1}{3}$
Vértices: $A\left(\dfrac{9\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $A'\left(-\dfrac{9\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $B(0,6)$, $B'(0,-6)$
Focos: $F\left(3\sqrt{2}, 0\right)$, $F'\left(-3\sqrt{2}, 0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{81/2} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Ecuación general: $8x^2 + 9y^2 = 324$

Problema 4 Encontrar los puntos de la recta

$$r : \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2}$$

que se encuentran a una distancia 7 del punto $P(2,2)$.
Solución:
Construimos la circunferencia de centro P y radio 7:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 49$$

Cortamos r con esta circunferencia; para ello ponemos r en parámetricas: $r : \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{array} \right.$ y sustituimos en la circunferencia:

$$(-\lambda - 2)^2 + (1 + 2\lambda - 2)^2 = 49 \Longrightarrow 5\lambda^2 - 44 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -2,9665, \ \ \lambda_2 = 2,9665$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -2,9665 \Longrightarrow P_1(2,966; -4,933) \\ \lambda_2 = 2,9665 \Longrightarrow P_2\,(-2,966; 6,933) \end{array} \right.$$

Problema 5 Se quiere construir un canal cerrado para canoas en un parque de atracciones. La suma de las distancias de un punto de esta curva a dos puntos fijos es contante e igual a 1000 km. Los dos puntos fijos son el (100,0) y el (0,100), tomando las dimensiones en kilométros. Se pide:

a) Identifica de que curva se trata.

b) Calcular la ecuación de esta curva.

c) Calcular las tangentes a la curva en los puntos en los que corta la recta $x = 50$

Solución:

a) Se trata de una elipse por definición.

b) Sea $P(x, y)$ un punto de esa elipse, sean $F(100, 0)$ y $F'(0, 100)$ sus focos, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{FP}| + |\overrightarrow{F'P}| = 1000 \Longrightarrow \sqrt{(x - 100)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - 100)^2} = 1000$$

$$(x - 100)^2 + y^2 = (1000 - \sqrt{x^2 + (y - 100)^2})^2 \Longrightarrow$$

$$x - y + 5000 = 10\sqrt{x^2 + (y - 100)^2} \Longrightarrow$$

$$99x^2 + 99y^2 + 2xy - 10000x - 10000y - 24000000 = 0$$

c) Si $x = 50 \Longrightarrow 99y^2 - 9900y - 24252500 = 0 \Longrightarrow y_1 = -447,468$ e $y_2 = 547,468$. Los puntos en los que tenemos que calcular las tangentes son $Q(50; 547,468)$ y $H(50; -447,468)$. Calculamos la derivada de la función:

$$198xdx198ydy + 2ydx + 2xdy - 10000dx - 10000dy = 0 \Longrightarrow$$

$$(198x + 2y - 10000)dx + (198y + 2x - 10000)dy = 0 \Longrightarrow$$

$$(198y + 2x - 10000)dy = -(198x + 2y - 10000)dx \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{198x + 2y - 10000}{198y + 2x - 10000}$$

La pendiente m_1 de la recta pendiente en $Q(50; 547,468)$ es:

$$m_1 = -\frac{198 \cdot 50 + 2 \cdot 547,468 - 10000}{198 \cdot 547,468 + 2 \cdot 50 - 10000} = -0,01$$

La ecuación de la recta tangente en este punto es:

$$y - 547,468 = -0,01(x - 50)$$

La pendiente m_2 de la recta pendiente en $H(50; -447,468)$ es:

$$m_2 = -\frac{198 \cdot 50 + 2 \cdot (-447,468) - 10000}{198 \cdot (-447,468) + 2 \cdot 50 - 10000} = 0,01$$

La ecuación de la recta tangente en este punto es:

$$y + 447,468 = 0,01(x - 50)$$