Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Febrero 2021

Problema 1 (2 puntos) Encontrar todas las ecuaciones de la recta cuya ecuación general es $5x - y + 7 = 0$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,5) \\ A(-1,2) \end{cases}$$

- Vectorial: $(x,y) = (-1,2) + \lambda(1,5)$
- Paramétrica: $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 5\lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{5}$
- General: $5x - y + 7 = 0$
- Explícita: $y = 5x + 7$
- Punto pendiente: $y - 2 = 5(x+1)$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m = \tan\alpha = 5 \Longrightarrow \alpha = 78^\circ 41' 24''$

Problema 2 (5 puntos) Si los puntos $A(-3,-1)$, $B(5,0)$ y $C(2,7)$ tres vértices consecutivos de un triángulo, se pide calcular

a) (1,5 puntos) el circuncentro.

b) (2 puntos) sus ángulos y decidir que tipo de triángulo es.

c) (1,5 puntos) calcular la longitud de la altura sobre el lado AB y la ecuación de la recta que la define.

Solución:

a)
- Mediatriz entre A y B:

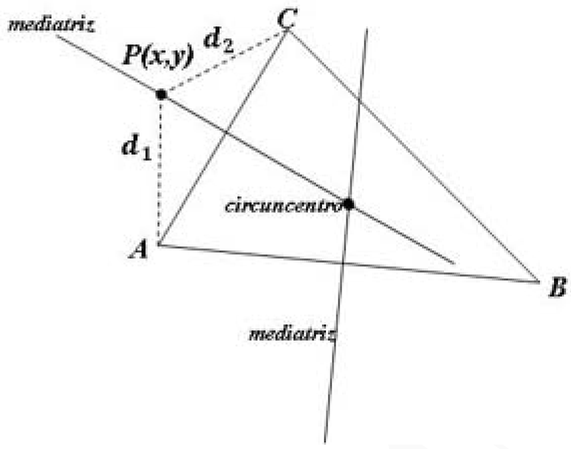
$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} \Longrightarrow 16x + 2y - 15 = 0$$

- Mediatriz entre A y C:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-7)^2} \Longrightarrow 10x + 16y - 43 = 0$$

- Circuncentro:

$$\begin{cases} 16x + 2y - 15 = 0 \\ 10x + 16y - 43 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{77}{118}, \frac{269}{118}\right)$$



b) $|\overrightarrow{AB}| = |(8,1)| = \sqrt{65}$, $|\overrightarrow{AC}| = |(5,8)| = \sqrt{89}$:

$$\cos\hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{40+8}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{89}} \Longrightarrow \hat{A} = 50^\circ 52' 11''$$

$|\overrightarrow{BA}| = |(-8,-1)| = \sqrt{65}$, $|\overrightarrow{BC}| = |(-3,7)| = \sqrt{58}$:

$$\cos\hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{24-7}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{58}} \Longrightarrow \hat{B} = 73^\circ 55' 35''$$

$|\overrightarrow{CA}| = |(-5,-8)| = \sqrt{89}$, $|\overrightarrow{CB}| = |(3,-7)| = \sqrt{58}$:

$$\cos\hat{C} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{-15+56}{\sqrt{89}\cdot\sqrt{58}} \Longrightarrow \hat{C} = 55^\circ 12' 14''$$

Se trata de un triángulo escaleno.

c) $\overrightarrow{AB} = (8,1) \perp \overrightarrow{u} = (1,-8)$:
La recta que une A y B: $x-8y+\lambda = 0$ como tiene que pasar por $A(-3,-1) \Longrightarrow -3+8+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -5 \Longrightarrow t : x-8y-5 = 0$

$$\text{Altura} = d(C,t) = \frac{|2-56-5|}{\sqrt{1+64}} = \frac{59\sqrt{65}}{65}\ u$$

La recta que define esta altura tiene de ecuación $h_1 : 8x+y+\lambda = 0$ y, como pasa por $C(2,7)$, tenemos $16+7+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -23 \Longrightarrow h_1 : 8x+y-23 = 0$

Problema 3 (3 puntos) Sea el punto $A(2,-1)$ y la recta $r : x-3y-1 = 0$. Se pide calcular:

a) (0,5 puntos) Una recta paralela a r que pase por el punto A.

b) (0,5 puntos) Una recta perpendicular a r que pase por el punto A.

c) (1 punto) El punto A'' simétrico de A respecto de la recta r.

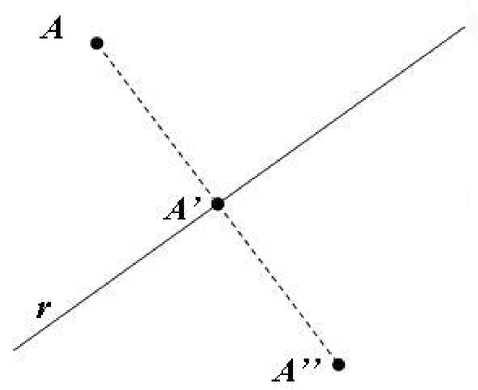
d) (1 punto) Las rectas bisectrices de r con $s : 3x-y+2 = 0$.

Solución:

a) $x - 3y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 2 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -5$. La recta buscada es $h : x - 3y - 5 = 0$

b) $3x + y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 6 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -5$. La recta buscada es $t : 3x + y - 5 = 0$

c) Calculamos A'' simétrico de A respecto de la recta r:



- Calculamos una recta t perpendicular a r y que pase por A, calculada en el apartado anterior.
- Calculamos el punto de corte entre r y t:

$$\left\{ \begin{array}{l} r : x - 3y - 1 = 0 \\ t : 3x + y - 5 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow A'\left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

- El punto A' calculado es el punto medio entre el punto A y el punto A'' que tenemos que calcular:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = 2\left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right) - (2, -1) = \left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

d)

$$d(P, r) = d(P, s) \Longrightarrow \frac{|x - 3y - 1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x - y + 2|}{\sqrt{10}} \Longrightarrow |x - 3y - 1| = |3x - y + 2|$$

- $x - 3y - 1 = 3x - y + 2 \Longrightarrow 2x + 2y + 3 = 0$
- $x - 3y - 1 = -3x + y - 2 \Longrightarrow 4x - 4y + 1 = 0$