Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Enero 2021

Problema 1 Dados los números complejos $z_1 = -7 + 2i$ y $z_2 = 3 - 4i$. Se pide calcular:

a) $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$

b) $z_1 \cdot z_2$

c) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Solución:

a) $z_1 + z_2 = -4 - 2i$ y $z_1 - z_2 = -10 + 6i$

b) $z_1 \cdot z_2 = -13 + 34i$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{29}{25} - \dfrac{22}{25}i$

Problema 2 Si $z = -4 + 5i$ calcular z^{10}.

Solución:

$$z = -4 + 5i = \sqrt{41}_{141^\circ 20' 25''} = \sqrt{41}(\cos 141^\circ 20' 25'' + i \sin 141^\circ 20' 25'')$$

$$z^{10} = (-4 + 5i)^{10} = 41^5_{10 \cdot 141^\circ 20' 25''} = 41^5_{1413^\circ 24' 7''} = 41^5_{333^\circ 24' 7''} =$$

$$41^5(\cos 333^\circ 24' 7'' + i \sin 333^\circ 24' 7'') = (103595049 - 51872201i)$$

Problema 3 Calcular las raices de $\sqrt[3]{-6 + 7i}$

Solución:

$$z = -6 + 7i = \sqrt{85}_{179^\circ 58' 47''} = \sqrt{85}(\cos 179^\circ 58' 47'' + i \sin 179^\circ 58' 47'')$$

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[6]{85}_{59^\circ 59' 36''} = \sqrt[6]{85}(\cos 59^\circ 59' 36'' + i \sin 59^\circ 59' 36'') \\ \sqrt[6]{85}_{179^\circ 59' 36''} = \sqrt[6]{85}(\cos 179^\circ 59' 36'' + i \sin 179^\circ 59' 36'') \\ \sqrt[6]{85}_{299^\circ 59' 36''} = \sqrt[6]{85}(\cos 299^\circ 59' 36'' + i \sin 299^\circ 59' 36'') \end{cases}$$

Problema 4 Sean $A(-3, -2)$, $B(5, 0)$ y $C(6, 8)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Calcular el cuarto vértice D.

b) La longitud de sus lados.

c) Los ángulos que forman.

d) Decidir de que figura geométrica se trata.

e) Su centro.

f) La altura sobre el lado $\overline{AB}$.

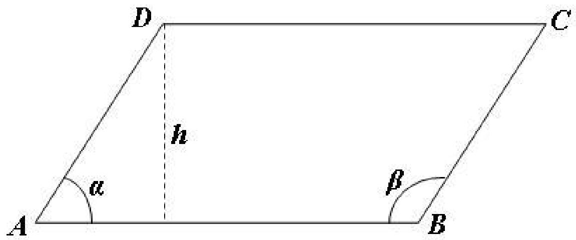
g) Su área.

h) El punto simétrico de A respecto de C

i) Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ con módulo 7.

j) Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres segmentos iguales.

Solución:



a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-3,-2) + (1,8) = (-2,6)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(8,2)| = \sqrt{68}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(1,8)| = \sqrt{65}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{24}{\sqrt{68}\cdot\sqrt{65}} \Longrightarrow \alpha = 68^\circ 50' 19''$ y $\beta = 111^\circ 9' 41''$

d) Se trata de un paralelogramo, pero no es una figura concreta.

e) $M\left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$

f)

$$\sin\alpha = \frac{h}{|\overrightarrow{AD}|} \Longrightarrow h = |\overrightarrow{AD}|\cdot\sin\alpha = 7,52\ u$$

g) $S = |\overrightarrow{AB}|\cdot h = 62\ u^2$

h) $C = \dfrac{A+A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (15,18)$

i) $\overrightarrow{AC} = (9,10) \perp \overrightarrow{u} = (10,-9)$ y $\overrightarrow{w} = \frac{7}{\sqrt{181}}(10,-9) = \left(\dfrac{70\sqrt{181}}{181}, -\dfrac{63\sqrt{181}}{181}\right)$ es un vector perpendicular al $\overrightarrow{AC}$, pero con módulo 7.

j)

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(3, \frac{10}{3}\right)$$

$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-3,-2) + \left(3, \frac{10}{3}\right) = \left(0, \frac{4}{3}\right)$$

$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(0, \frac{4}{3}\right) + \left(3, \frac{10}{3}\right) = \left(3, \frac{14}{3}\right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(3, \frac{14}{3}\right) + \left(3, \frac{10}{3}\right) = (6, 8)$$