Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato CN
Marzo 2021

Problema 1 Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2x^2 + 3x - 3}\right)$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow 6} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5} - \sqrt{5x + 1}}{x - 6}$

c) $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 1}{x^5 - x^4 + 8x^3 - 8x^2 - 3x + 3}$

d) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{5\cos x + 3xe^x - 5}{2x\cos x}$

e) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{e^{2x} + 5x^2 - 2}{e^{2x} - 3x + 2}$

f) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{2x\cos x + xe^x}{\cos x - e^x}$

g) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\ln(x^2 - 5)}{\ln(x^2 + 4)}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2x^2 + 3x - 3}\right) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow 6} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5} - \sqrt{5x + 1}}{x - 6} = \dfrac{7\sqrt{31}}{62}$

c) $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 1}{x^5 - x^4 + 8x^3 - 8x^2 - 3x + 3} = \dfrac{1}{3}$

d) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{5\cos x + 3xe^x - 5}{2x\cos x} = \dfrac{3}{2}$

e) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{e^{2x} + 5x^2 - 2}{e^{2x} - 3x + 2} = 1$

f) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{2x\cos x + xe^x}{\cos x - e^x} = -3$

g) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\ln(x^2 - 5)}{\ln(x^2 + 4)} = 1$

Problema 2 Calcular la primera derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{x^2 \sin^3(5x)}{e^{2x}\cos x^2}}$

b) $y = (3x^2 - 1)^{\sin(2x)}$

c) $y = (\arccos x)^{5x-1}$

d) $y = \log_6 \dfrac{4x^2-3}{\sqrt{x^2-1}}$

e) $y = \sqrt[7]{\dfrac{x^2-1}{\cos^2(3x)}}$

f) $y = \sec^2(x^2-1)\log_4(x^2+3)$

g) $y = 5^{\arctan(x^2-1)}\tan^2(x+3)$

Solución:

a) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{x^2\sin^3(5x)}{e^{2x}\cos x^2}} = \frac{1}{5}\left(2\ln x + 3\ln\sin(5x) - (2x)\ln e - \ln(\cos x^2)\right) \Longrightarrow$

$$y' = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{x} + 3\frac{5\cos(5x)}{\sin(5x)} - 2 - \frac{-2x\sin x^2}{\cos x^2}\right)$$

b) $y = (3x^2-1)^{\sin(2x)} \Longrightarrow y' = (3x^2-1)^{\sin(2x)}\left(2\cos(2x)\ln(3x^2-1) + \sin(2x)\frac{6x}{3x^2-1}\right)$

c) $y = (\arccos x)^{5x-1} \Longrightarrow y' = (\arccos x)^{5x-1}\left(5\ln(\arccos x) + (5x-1)\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arccos x}\right)$

d) $y = \log_6 \dfrac{4x^2-3}{\sqrt{x^2-1}} = \log_6(4x^2-3) - \dfrac{1}{2}\log_6(x^2-1) \Longrightarrow y' = \dfrac{8x}{(4x^2-3)\ln 6} - \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 6}$

e) $y = \sqrt[7]{\dfrac{x^2-1}{\cos^2(3x)}} \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{x^2-1}{\cos^2(3x)}\right)^{-6/7}\left(\dfrac{2x\cos^2(3x) - (x^2-1)(2\cos(3x)(-3\sin(3x))}{\cos^4(3x)}\right)$

f) $y = \sec^2(x^2-1)\log_4(x^2+3) \Longrightarrow y' = 2x\sec^2(x^2+2)\tan(x^2+2)\log_4(x^2+3) + \sec^2(x^2-1)\dfrac{2x}{(x^2+3)\ln 4}$

g) $y = 5^{\arctan(x^2-1)}\tan^2(x+3) \Longrightarrow y' = \dfrac{2x}{1+(x^2-1)^2}5^{\arctan(x^2-1)}\ln 5\tan^2(x+3) + 5^{\arctan(x^2-1)}2\tan(x+3)\dfrac{1}{\cos^2(x+3)}$

Problema 3 Calcular las rectas tangente y normal de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+8}{2x-4}$ en el punto $x = 0$.

b) $f(x) = (x^2+3)e^{3x}$ en el punto $x = 0$.

Solución:

a) $b = f(a) \Longrightarrow b = f(0) = -2$ e $y - b = m(x-a)$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x-8}{2(x-2)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = -1$$

Recta Tangente: $y + 2 = -x$

Recta Normal: $y + 2 = x$

b) $b = f(a) \Longrightarrow b = f(0) = 3$ e $y - b = m(x - a)$

$$f'(x) = (3x^2 + 2x + 9)e^{3x} \Longrightarrow m = f'(0) = 9$$

Recta Tangente: $y - 3 = 9x$

Recta Normal: $y - 3 = -\dfrac{1}{9}x$

Problema 4 Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int 7xe^{2x^2+8}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{5x}{7x^2-1}\,dx$

c) $\displaystyle\int 5x^3\cos(10x^4-3)\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{7x}{1+x^4}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x^2\cos x-7x^2e^x+5x}{x^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{8x^5-2x^4-4\sqrt[5]{x^3}-5x}{x^2}\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int 7xe^{2x^2+8}\,dx = \frac{7}{4}e^{2x^2+8} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{5x}{7x^2-1}\,dx = \frac{5}{14}\ln|7x^2-1| + C$

c) $\displaystyle\int 5x^3\cos(10x^4-3)\,dx = \frac{1}{8}\sin(10x^4-3) + C$

d) $\displaystyle\int \frac{7x}{1+x^4}\,dx = \frac{7}{2}\arctan x^2 + C$

e) $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x^2\cos x-7x^2e^x+5x}{x^2}\,dx = 3x + 5\sin x - 7e^x + 5\ln|x| + C$

f) $\displaystyle\int \frac{8x^5-2x^4-4\sqrt[5]{x^3}-5x}{x^2}\,dx = 2x^4 - \frac{2x^3}{3} + 10x^{-2/5} - 5\ln|x| + C$