Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Abril 2020

Problema 1 (2 puntos) Encontrar todas las ecuaciones de la recta cuya ecuación general es $x-5y+1=0$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(5,1)\\ A(-1,0)\end{array}\right.$$

- Vectorial: $(x,y)=(-1,0)+\lambda(5,1)$
- Paramétrica: $\left\{\begin{array}{l}x=-1+5\lambda\\ y=\lambda\end{array}\right.$
- Continua: $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y}{1}$
- General: $x-5y+1=0$
- Explícita: $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{5}$
- Punto pendiente: $y=\dfrac{1}{5}(x+1)$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m=\tan\alpha=\dfrac{1}{5}\Longrightarrow\alpha=11^{o}18'36''$

Problema 2 (3 puntos) Sea el punto $A(1,7)$ y la recta $r:4x-y+1=0$. Se pide calcular:

a) (0,5 puntos) Una recta paralela a r que pase por el punto A.

b) (0,5 puntos) Una recta perpendicular a r que pase por el punto A.

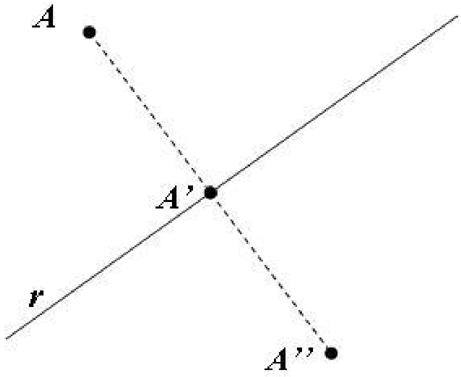
c) (1 punto) El punto A'' simétrico de A respecto de la recta r.

d) (1 punto) Las rectas bisectrices de r con $s:x-4y+1=0$.

Solución:

a) $4x-y+\lambda=0$ y como pasa por el punto $A\Longrightarrow 4-7+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=3$. La recta buscada es $h:4x-y+3=0$

b) $x+4y+\lambda=0$ y como pasa por el punto $A\Longrightarrow 1+28+\lambda=0\Longrightarrow$ $\lambda=-29$. La recta buscada es $t:x+4y-29=0$



c) Calculamos A'' simétrico de A respecto de la recta r:

- Calculamos una recta t perpendicular a r y que pase por A, calculada en el apartado anterior.
- Calculamos el punto de corte entre r y t:

$$\begin{cases} r: 4x - y + 1 = 0 \\ t: x + 4y - 29 = 0 \end{cases} \Longrightarrow A'\left(\frac{25}{17}, \frac{117}{17}\right)$$

- El punto A' calculado es el punto medio entre el punto A y el punto A'' que tenemos que calcular:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = 2\left(\frac{25}{17}, \frac{117}{17}\right) - (1,7) = \left(\frac{22}{17}, \frac{115}{17}\right)$$

d)

$$d(P, r) = d(P, s) \Longrightarrow \frac{|4x - y + 1|}{\sqrt{17}} = \frac{|x - 4y + 1|}{\sqrt{17}} \Longrightarrow |4x - y + 1| = |x - 4y + 1|$$

- $4x - y + 1 = x - 4y + 1 \Longrightarrow x + y = 0$
- $4x - y + 1 = -x + 4y - 1 \Longrightarrow 5x + 5y + 2 = 0$

Problema 3 (3 puntos) Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-6, 0)$, $B(0, 5)$ y $C(2, 1)$. Obtener su centro, su radio.

Solución:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

$$\begin{cases} -6m + p = -36 \\ 5n + p = -25 \\ 2m + n + p = -5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m = 72/17 \\ n = -49/17 \\ p = -180/17 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + \frac{72}{17}x - \frac{49}{17}y - \frac{180}{17} = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m = -2a = \frac{72}{17} \Longrightarrow a = -\frac{36}{17} \\ n = -2b = -\frac{49}{17} \Longrightarrow b = \frac{49}{34} \\ p = -\frac{180}{17} = a^2 + b^2 - r^2 \Longrightarrow r = \frac{\sqrt{10645}}{17} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{36}{17}, \frac{49}{34}\right), \ \ r = \frac{\sqrt{10645}}{17}$$

Problema 4 (2 puntos) Encontrar los puntos de la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1}$$

que se encuentran a una distancia 7 del punto $P(1, 2)$.
Solución:
Construimos la circunferencia de centro P y radio 7:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 49$$

Cortamos r con esta circunferencia; para ello ponemos r en paramétricas: $r : \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \end{array}\right.$ y sustituimos en la circunferencia:

$$(1+2\lambda-1)^2+(-1+\lambda-2)^2 = 49 \Longrightarrow 5\lambda^2-6\lambda-40 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 3,49, \ \ \lambda_2 = -2,29$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 3,49 \Longrightarrow P_1(7{,}983; 2{,}491) \\ \lambda_2 = -2,29 \Longrightarrow P_2\,(-3{,}583; -3{,}291) \end{array}\right.$$