Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2020

Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-4,0)$, $B(0,5)$ y $C(1,6)$. Obtener su centro, su radio.

Solución:

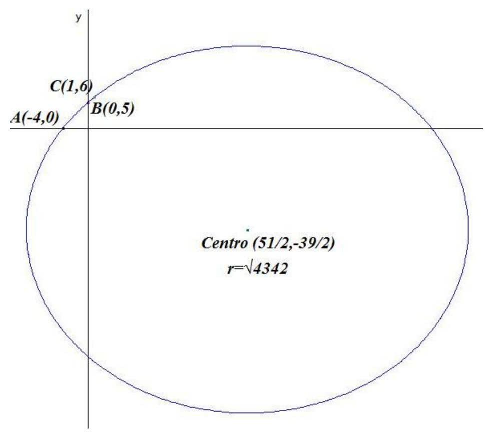
$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

$$\left\{\begin{array}{r} -4m+p=-16\\ 5n+p=-25\\ m+6n+p=-37 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=-51\\ n=39\\ p=-220 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2-51x+39y-220=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m=-2a=-51\Longrightarrow a=51/2\\ n=-2b=39\Longrightarrow b=-39/2\\ p=-220=a^2+b^2-r^2\Longrightarrow r=\sqrt{4342} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro}=\left(\frac{51}{2},-\frac{39}{2}\right),\ \ r=\sqrt{4342}$$



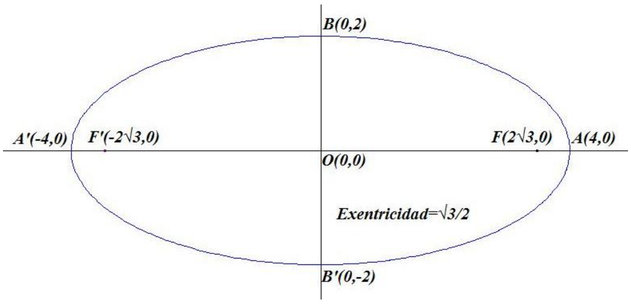
Problema 2 Sea $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ la ecuación de una elipse horizontal centrada en el origen de coordenadas. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$a^2=16\Longrightarrow a=4,\ \ b^2=4\Longrightarrow b=2$$

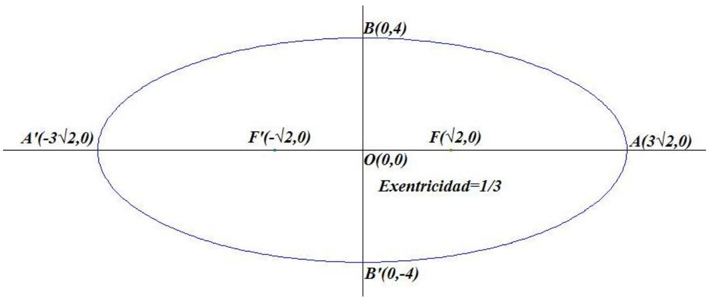
$$a^2=b^2+c^2\Longrightarrow c=2\sqrt{3}\quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Eje Mayor= $2a = 8$
Eje Menor= $2b = 4$
Distancia Focal= $2c = 4\sqrt{3}$
Excentricidad= $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Vértices: $A(4,0),\ A'(-4,0),\ B(0,2),\ B(0,-2)$
Focos: $F\left(2\sqrt{3},0\right),\ F'\left(-2\sqrt{3},0\right)$
Ecuación general: $x^2 + 4y^2 = 16$



Problema 3 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 8 cm y tiene una excentricidad $e = \dfrac{1}{3}$. Calcular los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:



$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Longrightarrow a = 3c$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 9c^2 = 16 + c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{2}$$
$$a = 3c = 3\sqrt{2}$$

Eje Mayor= $2a = 6\sqrt{2}$
Eje Menor= $2b = 8$
Distancia Focal= $2c = 2\sqrt{2}$
Excentricidad= $e = \dfrac{1}{3}$

Vértices: $A\left(3\sqrt{2},0\right)$, $A'\left(-3\sqrt{2},0\right)$, $B(0,4)$, $B'(0,-4)$
Focos: $F\left(\sqrt{2},0\right)$, $F'\left(-\sqrt{2},0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{16}=1$$

Ecuación general: $8x^2+9y^2=144$

Problema 4 Encontrar los puntos de la recta

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}$$

que se encuentran a una distancia 7 del punto $P(4,2)$.
Solución:
Construimos la circunferencia de centro P y radio 7:

$$(x-4)^2+(y-2)^2=49$$

Cortamos r con esta circunferencia; para ello ponemos r en parámetricas:
$r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1+3\lambda \end{cases}$ y sustituimos en la circunferencia:

$(1+\lambda-4)^2+(-1+3\lambda-2)^2=49 \Longrightarrow 10\lambda^2-24\lambda-31=0 \Longrightarrow \lambda_1=-0,931,\ \ \lambda_2=3,331$

$$\begin{cases} \lambda_1=-0,931 \Longrightarrow P_1(0,069;-3,792) \\ \lambda_2=3,331 \Longrightarrow P_2\,(4,331;8,992) \end{cases}$$

Problema 5 Se va a construir un circuito para carreras de coches, la suma de las distancias de un punto de esta curva a dos puntos fijos es contante e igual a 10 km. Los dos puntos fijos son el (3,0) y el (0,3), tomando las dimensiones en kilométros. Se pide:

a) Identifica de que curva se trata.

b) Calcular la ecuación de esta curva.

c) Calcular las tangentes a la curva en los puntos en los que corta la recta $x=2$

Solución:

a) Se trata de una elipse por definición.

b) Sea $P(x,y)$ un punto de esa elipse, sean $F(3,0)$ y $F'(0,3)$ sus focos, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{FP}|+|\overrightarrow{F'P}|=10 \Longrightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=10$$

$$(x-3)^2 + y^2 = (10 - \sqrt{x^2 + (y-3)^2})^2 \Longrightarrow$$
$$3x - 3y + 50 = 10\sqrt{x^2 + (y-3)^2} \Longrightarrow$$
$$(3x - 3y + 50)^2 = 100(x^2 + (y-3)^2) \Longrightarrow$$
$$91x^2 + 91y^2 + 18xy - 300x - 300y - 1600 = 0$$

c) Si $x = 2 \Longrightarrow 91y^2 - 264y - 1836 = 0 \Longrightarrow y_1 = -3,2696$ e $y_2 = 6,1707$. Los puntos en los que tenemos que calcular las tangentes son $Q(2; 6,1707)$ y $H(2; -3,2696)$. Calculamos la derivada de la función:

$$182xdx182ydy + 18ydx + 18xdy - 300dx - 300dy = 0 \Longrightarrow$$
$$(182x + 18y - 300)dx + (182y + 18x - 300)dy = 0 \Longrightarrow$$
$$(182y + 18x - 300)dy = -(182x + 18y - 300)dx \Longrightarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{182x + 18y - 300}{182y + 18x - 300}$$

La pendiente m_1 de la recta pendiente en $Q(2; 6,1707)$ es:

$$m_1 = -\frac{182 \cdot 2 + 18 \cdot 6,1707 - 300}{182 \cdot 6,1707 + 18 \cdot 2 - 300} = -0,2038$$

La ecuación de la recta tangente en este punto es:

$$y - 6,1707 = -0,2038(x-2)$$

La pendiente m_2 de la recta pendiente en $H(2; -3,2696)$ es:

$$m_2 = -\frac{182 \cdot 2 + 18 \cdot (-3,2696) - 300}{182 \cdot (-3,2696) + 18 \cdot 2 - 300} = 0,006$$

La ecuación de la recta tangente en este punto es:

$$y + 3,2696 = 0,006(x-2)$$