Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Enero 2020

Problema 1 Dados los números complejos $z_1 = -4 + 7i$ y $z_2 = 2 - 3i$. Se pide calcular:

a) $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$

b) $z_1 \cdot z_2$

c) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Solución:

a) $z_1 + z_2 = -2 + 4i$ y $z_1 - z_2 = -6 + 10i$

b) $z_1 \cdot z_2 = 13 + 26i$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{29}{13} + \dfrac{2}{13}i$

Problema 2 Si $z = -2 + 5i$ calcular z^{10}.

Solución:

$$z = -2 + 5i = \sqrt{29}_{111^{\circ}48'5''} = \sqrt{29}(\cos 111^{\circ}48'5'' + i \sin 111^{\circ}48'5'')$$

$$z^{10} = (-2 + 5i)^{10} = 29^5_{10\cdot 111^{\circ}48'5''} = 65^5_{1118^{\circ}00'51''} = 29^5_{38^{\circ}00'51''} =$$

$$29^5(\cos 38^{\circ}00'51'' + i \sin 38^{\circ}00'51'') = (16159899 + 12631900i)$$

Problema 3 Calcular las raices de $\sqrt[3]{-3 + 2i}$

Solución:

$$z = -3 + 2i = \sqrt{13}_{146^{\circ}18'36''} = \sqrt{13}(\cos 146^{\circ}18'36'' + i \sin 146^{\circ}18'36'')$$

$$\sqrt[3]{z} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[6]{13}_{48^{\circ}46'12''} = \sqrt[6]{13}(\cos 48^{\circ}46'12'' + i \sin 48^{\circ}46'12'') \\ \sqrt[6]{13}_{168^{\circ}46'12''} = \sqrt[6]{13}(\cos 168^{\circ}46'12'' + i \sin 168^{\circ}46'12'') \\ \sqrt[6]{13}_{288^{\circ}46'12''} = \sqrt[6]{13}(\cos 288^{\circ}46'12'' + i \sin 288^{\circ}46'12'') \end{array} \right.$$

Problema 4 Sean $A(-2, -1)$, $B(6, 0)$ y $C(8, 13)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Calcular el cuarto vértice D.

b) La longitud de sus lados.

c) Los ángulos que forman.

d) Decidir de que figura geométrica se trata.

e) Su centro.

f) La altura sobre el lado $\overline{AB}$.

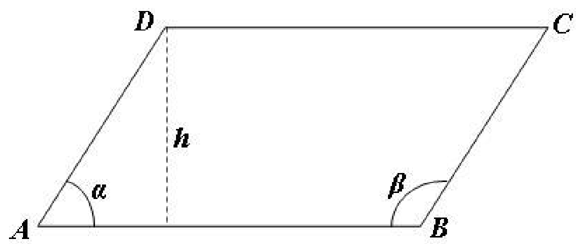
g) Su área.

h) El punto simétrico de A respecto de C

i) Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ con módulo 7.

j) Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres segmentos iguales.

Solución:



a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-2, -1) + (2, 13) = (0, 12)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(8, 1)| = \sqrt{65}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(2, 13)| = \sqrt{173}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{29}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{173}} \Longrightarrow \alpha = 74^{o}07'44''$ y $\beta = 105^{o}52'16''$

d) Se trata de un paralelogramo, pero no es una figura concreta.

e) $M\,(3, 6)$

f)
$$\sin\alpha = \frac{h}{|\overrightarrow{AD}|} \Longrightarrow h = |\overrightarrow{AD}|\cdot\sin\alpha = 12,65\ u$$

g) $S = |\overrightarrow{AB}|\cdot h = 102\ u^2$

h) $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (18, 27)$

i) $\overrightarrow{AC} = (10, 14) \perp \; \overrightarrow{u} = (14, -10)$ y $\overrightarrow{w} = \frac{7}{2\sqrt{74}}(14, -10) = \left(\frac{49}{\sqrt{74}}, -\frac{35}{\sqrt{74}}\right)$ es un vector perpendicular al $\overrightarrow{AC}$, pero con módulo 7.

j)

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{10}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-2, -1) + \left(\frac{10}{3}, \frac{14}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right) + \left(\frac{10}{3}, \frac{14}{3}\right) = \left(\frac{14}{3}, \frac{25}{3}\right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{14}{3}, \frac{25}{3}\right) + \left(\frac{10}{3}, \frac{14}{3}\right) = (8, 13)$$