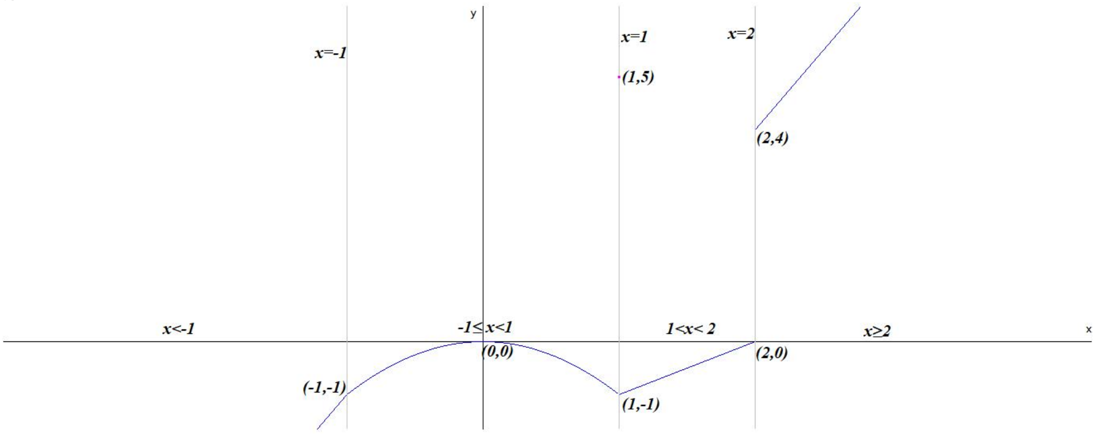
Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)
Mayo 2020

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 5 & \text{si} \quad x = 1 \\ x-2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 3x-2 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad no evitable(salto), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 5x^2 + bx - 3a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2 - 3bx + 1) = a - 3b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (5x^2 + bx - 3a) = 5 + b - 3a$$

$$a - 3b + 1 = 5 + b - 3a \Longrightarrow a - b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 3b & \text{si} \quad x < 1 \\ 10x + b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 2a - 3b; \;\; f'(1^+) = 10 + b \Longrightarrow 2a - 3b = 10 + b \Longrightarrow a - 2b = 5$$

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a - 2b = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 12x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 5x^2 - 4x + 9 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -6x + 12 & \text{si} \quad x < 1 \\ 10x - 4 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c \in [0, 2]/f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{21 - 1}{2} = 10$$

Si $c < 1$: $f'(c) = -6c + 12 = 10 \Longrightarrow c = \frac{1}{3}$ solución válida.
Si $c \geq 1$: $f'(c) = 10c - 4 = 10 \Longrightarrow c = \frac{7}{5}$ solución no válida.

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{2} & \text{si} & x < -1 \\ bx + 2 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{ax+2b}{3} & \text{si} & x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x - a}{2} = \dfrac{-1 - a}{2} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (bx + 2) = -b + 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{-1 - a}{2} = -b + 2 \Longrightarrow a - 2b = -5$$

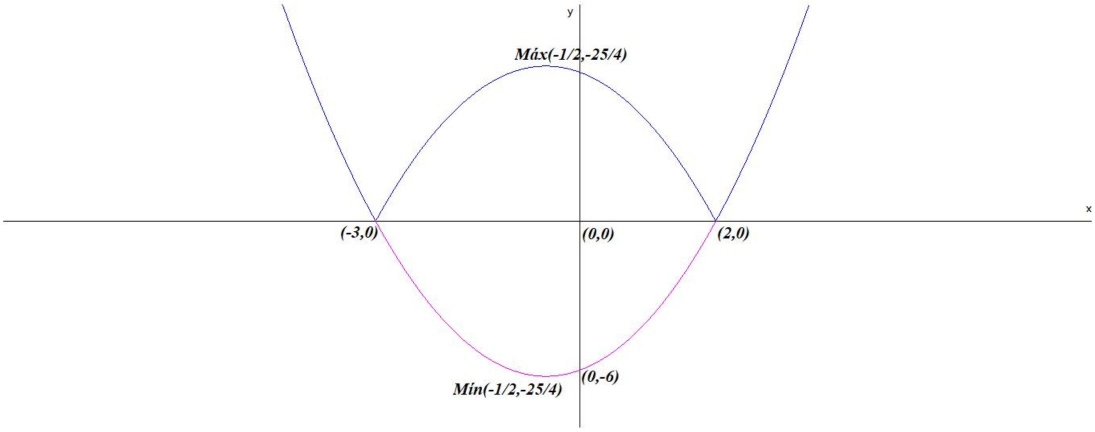
Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (bx + 2) = b + 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{ax + 2b}{3} = \dfrac{a + 2b}{3} \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{a + 2b}{3} = b + 2 \Longrightarrow a - b = 6$$

$$\begin{cases} a - 2b = -5 \\ a - b = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 17 \\ b = 11 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + x - 6|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x) = x^2 + x - 6 \Longrightarrow g'(x) = 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$:

x	y
0	-6
-3	0
2	0
$-1/2$	$-25/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcc} x^2 + x - 6 & \text{si} & x \le -3 \\ -(x^2 + x - 6) & \text{si} & -3 < x \le 2 \\ x^2 + x - 6 & \text{si} & 2 \le x \end{array} \right.$$

f es continua en $x = -3$:

$$\lim_{x \longrightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -3^-} (x^2 + x - 6) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -3^+} (-x^2 - x + 6) = 0$$

$$f(-3) = 0$$

y f es continua en $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (-x^2 - x + 6) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (x^2 + x - 6) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le -3 \\ -2x-1 & \text{si} \quad -3 < x \le 2 \\ 2x+1 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -3$: $f'(-3^-) = -5$ y $f'(-3^+) = 5$, luego no es derivable en $x = -3$.
Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -5$ y $f'(2^+) = 5$, luego no es derivable en $x = 5$.

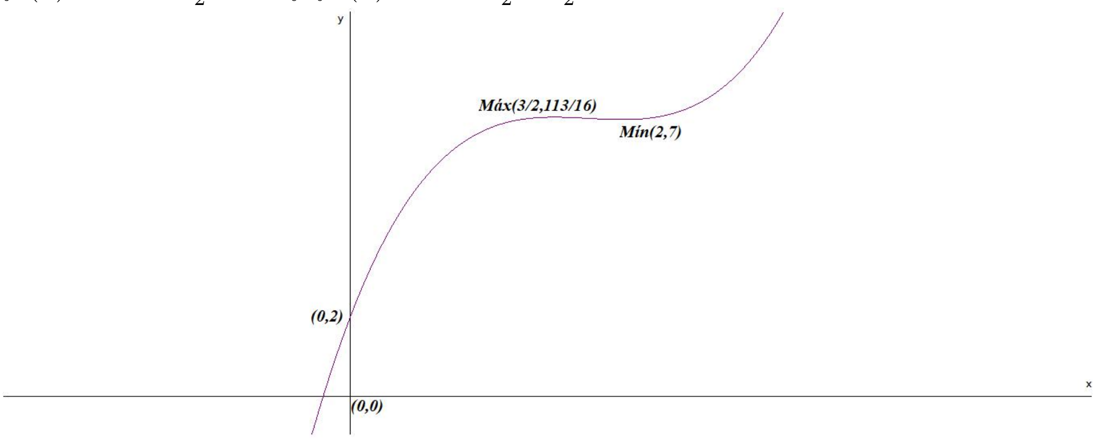
Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 - 4ax^2 + bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 7)$. Decidir de que extremo se trata.
Solución:

$$f(x) = x^3 - 4ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 8ax + b$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \Longrightarrow -c = 2 \\ f(2) = 7 \Longrightarrow -16a + 2b - c + 8 = 7 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow -16a + b + 12 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 21/16 \\ b = 9 \\ c = -2 \end{cases}$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - \frac{21}{4}x^2 + 9x - 2$
$f'(x) = 3x^2 - \frac{21}{2}x + 9$ y $f''(x) = 6x - \frac{21}{2} = \frac{3}{2} > 0 \Longrightarrow x = 2$ es un mínimo.



Problema 6 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3e^x + 2x + a & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x+10}{x+5} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

1. Calcular a de forma que la función sea continua en $x = 0$ y la continuidad en $\mathbb{R}$.
2. Para el valor de a obtenido en el apartado anterior estudiar la derivabilidad de la función en $\mathbb{R}$.

Solución:

1. Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} (3e^x + 2x + a) = 3 + a \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x+10}{x+5} = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow 3+a = 2 \Longrightarrow a = -1$$

En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es siempre continua. Luego la función es continua en $\mathbb{R}$ cuando $a = -1$.

2. Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 3e^x + 2 & \text{si} & x < 0 \\ \\ -\dfrac{5}{(x+5)^2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

$f'(0^-) = 5 \neq f'(0^+) = -1/5 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

En conclusión f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.