

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

Abril 2019

Problema 1 (4 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 1}$$

Se pide:

- (1 punto) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados y su simetría.
- (2 puntos) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- (1 punto) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 5x = 0 \implies (0, 0)$ con OX .
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.

$f(-x) = -f(x) \implies$ la función es impar.

b) $f'(x) = -\frac{5(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, creciente en el intervalo $(-1, 1)$ con un mínimo en $\left(-1, -\frac{5}{2}\right)$ y un máximo en $\left(1, \frac{5}{2}\right)$

c) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$:

Como $m = f'(0) = 5$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y = 5x$$

$$\text{Recta Normal : } y = -\frac{1}{5}x$$

Como $f(0) = 0$ las rectas pasan por el punto $(0, 0)$.

Problema 2 (2 puntos) Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3ax-b}{2} & \text{si } x < -1 \\ bx + a + 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{2ax-b}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3ax-b}{2} = \frac{-3a-b}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (bx+a+1) = -b+a+1 \end{cases} \implies \frac{-3a-b}{2} = -b+a+1 \implies 5a-b = -2$$

Continuidad en $x = 1$:

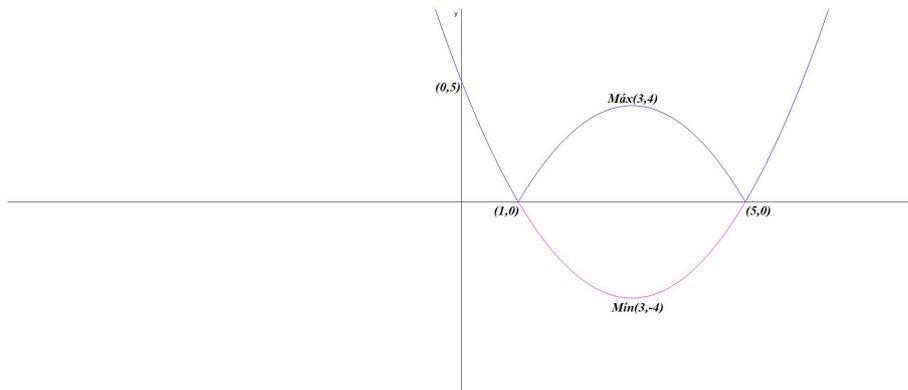
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx+a+1) = b+a+1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2ax-b}{2} = \frac{2a-b}{2} \end{cases} \implies \frac{2a-b}{2} = b+a+1 \implies b = -2/3$$

$$\begin{cases} 5a-b = -2 \\ b = -2/3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -8/15 \\ b = -2/3 \end{cases}$$

Problema 3 (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ y representarla gráficamente.

Solución:

$$\text{Hacemos } g(x) = x^2 - 6x + 5 \implies g'(x) = 2x - 6 = 0 \implies x = 3:$$



x	y
0	5
1	0
5	0
3	-4

$g''(x) = 2 \implies g''(3) > 0 \implies$ por lo que hay un mínimo en el punto $(3, -4)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(3, -4)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ -(x^2 - 6x + 5) & \text{si } 1 < x \leq 5 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 6x - 5) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (-x^2 + 6x - 5) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x + 6 & \text{si } 1 < x \leq 5 \\ 2x - 6 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = -4$ y $f'(1^+) = 4$, luego no es derivable en $x = 1$.

Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -4$ y $f'(5^+) = 4$, luego no es derivable en $x = 5$.

Resumiendo: La función es continua en \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} - \{2, 5\}$.

Problema 4 (1 punto) Dada la función $f(x) = ax^2 - 3bx + c$, encontrar los valores de a , b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(1, 5)$. Decidir de que extremo se trata.

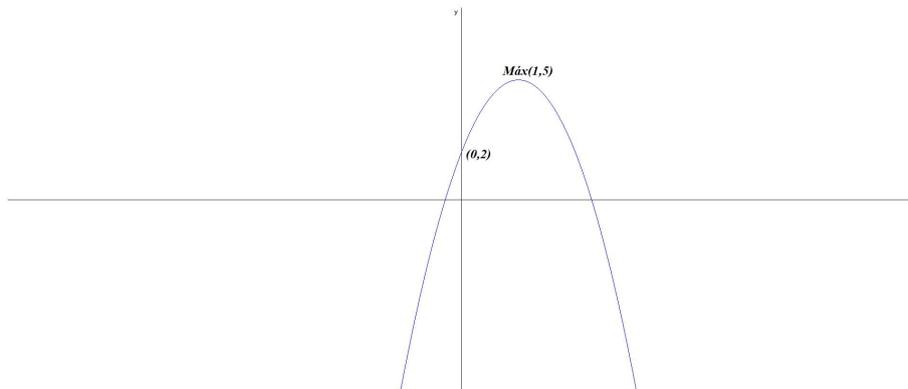
Solución:

$$f(x) = ax^2 - 3bx + c \implies f'(x) = 2ax - 3b$$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \implies c = 2 \\ f(1) = 5 \implies a - 3b + c = 5 \\ f'(1) = 0 \implies 2a - 3b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

La función pedida es: $f(x) = -3x^2 + 6x + 2$

$f'(x) = -6x + 6$ y $f''(x) = -6 \implies f''(1) = -6 < 0$ luego en $x = 1$ hay un máximo.



Problema 5 (2 puntos) Se trata de construir una pecera (prisma rectangular) de base rectangular, con la misma profundidad en toda ella. El largo de la pecera queremos que sea el doble del ancho y debe de contener 2 m^3 de agua, cuando está llena hasta el borde. Calcular las dimensiones que debe de tener si queremos gastarnos la menor cantidad de dinero en su construcción con vidrio. Calcular cuánto gastaremos si el m^2 del cristal que hemos elegido cuesta 11 euros.

Solución:

$$\begin{cases} V = 2 = 2x^2y \implies y = \frac{2}{2x^2} = \frac{1}{x^2} \\ S(x, y) = 2x^2 + 4xy + 2xy = 2x^2 + 6xy \end{cases} \implies S(x) = 2x^2 + \frac{6}{x}$$

$$S(x) = \frac{2x^3 + 6}{x} \implies S'(x) = \frac{4x^3 - 6}{x^2} = 0 \implies 2x^3 - 6 = 0 \implies x = 1,145$$

$$y = \frac{1}{1,145^2} = 0,763$$

	$(0; 1,145)$	$(1,145; +\infty)$
$S'(x)$	-	+
$S(x)$	decreciente	creciente

Luego en $x = 1,145$ hay un mínimo. Las dimensiones serían 1,145 m de ancho, 2,29 m de largo y 0,763 m de alto.

El área que tenemos que alicatar es $s(1,145) = \frac{2 \cdot 1,145^3 + 6}{1,145} = 7,86$
 m^2 luego el gasto sería: $7,86 \cdot 11 = 86,46$ euros.