Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Febrero 2019

Problema 1 (2 puntos) Encontrar todas las ecuaciones de la recta cuya ecuación general es $x - 3y + 2 = 0$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3,1) \\ A(1,1) \end{cases}$$

- Vectorial: $(x, y) = (1, 1) + \lambda(3, 1)$
- Paramétrica:$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{1}$
- General: $x - 3y + 2 = 0$
- Explícita: $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$
- Punto pendiente: $y - 1 = \dfrac{1}{3}(x - 1)$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m = \tan\alpha = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \alpha = 18^{o}26'6''$

Problema 2 (5 puntos) Si los puntos $A(-1, -3)$, $B(8, -5)$ y $C(3, 11)$ tres vértices consecutivos de un triángulo, se pide calcular

a) (1,5 puntos) el circuncentro.

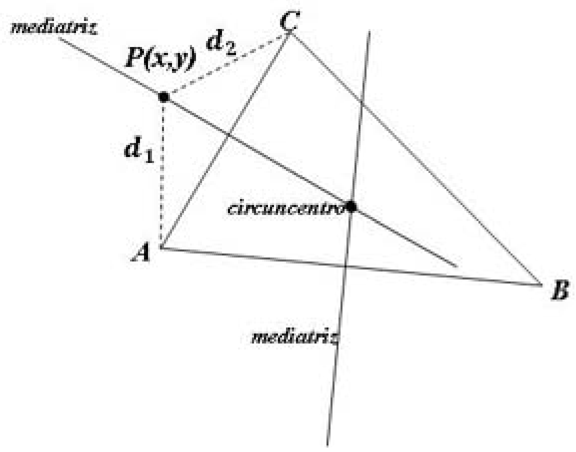
b) (2 puntos) sus ángulos y decidir que tipo de triángulo es.

c) (1,5 puntos) calcular la longitud de la altura sobre el lado AB y la ecuación de la recta que la define.

Solución:

a) - Mediatriz entre A y B:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y+5)^2} \Longrightarrow 18x - 4y - 79 = 0$$



- Mediatriz entre A y C:

$$\sqrt{((x+1)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-11)^2} \Longrightarrow 2x+7y=30$$

- Circuncentro:

$$\left\{ \begin{array}{l} 18x-4y-79=0 \\ 2x+7y=30 \end{array} \right. \Longrightarrow \left(\frac{673}{134}, \frac{191}{67}\right)$$

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(9,-2)| = \sqrt{85}$, $|\overrightarrow{AC}| = |(4,14)| = 2\sqrt{53}$:

$$\cos\hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{36-28}{\sqrt{85}\cdot 2\sqrt{53}} \Longrightarrow \hat{A} = 86^{\circ}35'1''$$

$|\overrightarrow{BA}| = |(-9,2)| = \sqrt{85}$, $|\overrightarrow{BC}| = |(-5,16)| = \sqrt{281}$:

$$\cos\hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{45+32}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{281}} \Longrightarrow \hat{B} = 60^{\circ}7'1''$$

$|\overrightarrow{CA}| = |(-4,-14)| = 2\sqrt{53}$, $|\overrightarrow{CB}| = |(5,-16)| = \sqrt{281}$:

$$\cos\hat{C} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{-20+224}{2\sqrt{53}\cdot\sqrt{281}} \Longrightarrow \hat{C} = 33^{\circ}17'58''$$

Se trata de un triángulo escaleno.

c) $\overrightarrow{AB} = (9,-2) \perp \overrightarrow{u} = (2,9)$:
La recta que une A y B: $2x+9y+\lambda=0$ como tiene que pasar por $A(-1,-3) \Longrightarrow -2-27+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=30 \Longrightarrow t: 2x+9y+30=0$

$$\text{Altura} = d(C,t) = \frac{|6+99+30|}{\sqrt{4+81}} = \frac{27\sqrt{85}}{17}\ u$$

La recta que define esta altura tiene de ecuación $h_1 : 9x - 2y + \lambda = 0$ y, como pasa por $C(3, 11)$, tenemos $27 - 22 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -5 \Longrightarrow h_1 : 9x - 2y - 5 = 0$

Problema 3 (3 puntos) Sea el punto $A(1, 6)$ y la recta $r : 3x - y + 5 = 0$. Se pide calcular:

a) (0,5 puntos) Una recta paralela a r que pase por el punto A.

b) (0,5 puntos) Una recta perpendicular a r que pase por el punto A.

c) (1 punto) El punto A'' simétrico de A respecto de la recta r.

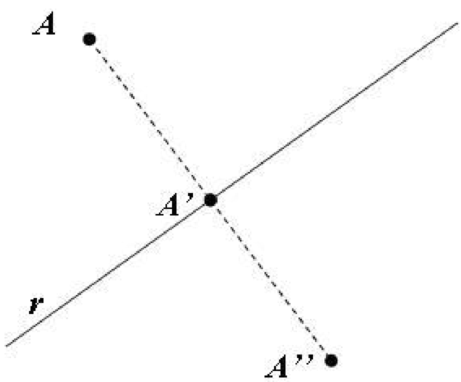
d) (1 punto) Las rectas bisectrices de r con $s : x - 3y + 3 = 0$.

Solución:

a) $3x-y+\lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 3-6+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 3$. La recta buscada es $h : 3x - y + 3 = 0$

b) $x + 3y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 1 + 18 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -19$. La recta buscada es $t : x + 3y - 19 = 0$

c) Calculamos A'' simétrico de A respecto de la recta r:



- Calculamos una recta t perpendicular a r y que pase por A, calculada en el apartado anterior.
- Calculamos el punto de corte entre r y t:

$$\left\{\begin{array}{l} r : 3x - y + 5 = 0 \\ t : x + 3y - 19 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow A'\left(\frac{2}{5}, \frac{31}{5}\right)$$

- El punto A' calculado es el punto medio entre el punto A y el punto A'' que tenemos que calcular:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = 2\left(\frac{2}{5}, \frac{31}{5}\right) - (1, 6) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{32}{5}\right)$$

d)

$$d(P,r) = d(P,s) \Longrightarrow \frac{|3x-y+5|}{\sqrt{10}} = \frac{|x-3y+3|}{\sqrt{10}} \Longrightarrow |3x{-}y{+}5| = |x{-}3y{+}3|$$

- $3x - y + 5 = x - 3y + 3 \Longrightarrow x + y + 1 = 0$
- $3x - y + 5 = -x + 3y - 3 \Longrightarrow x - y + 2 = 0$