Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Enero 2019

Problema 1 Dados los números complejos $z_1 = -5 + 3i$ y $z_2 = 2 + 7i$. Se pide calcular:

a) $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$

b) $z_1 \cdot z_2$

c) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Solución:

a) $z_1 + z_2 = -3 + 10i$ y $z_1 - z_2 = -7 - 4i$

b) $z_1 \cdot z_2 = -21 - 29i$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{11}{53} + \dfrac{41}{53}i$

Problema 2 Si $z = 4 - 7i$ calcular z^{10}.

Solución:

$$z = 4 - 7i = \sqrt{13}_{119^o44'42''} = \sqrt{65}(\cos 119^o44'42'' + i \sin 119^o44'42'')$$

$$z^{10} = (3 - 8i)^{10} = 65^5_{10\cdot 119^o44'42''} = 65^5_{1197^o27'00''} = 65^5_{117^o27'00''} =$$

$$65^5(\cos 117^o27'00'' + i \sin 117^o27'00'') = (-534864245, 1 + 1029657503i)$$

Problema 3 Calcular las raices de $\sqrt[3]{-4+5i}$

Solución:

$$z = -4 + 5i = \sqrt{41}_{128^o39'35''} = \sqrt{41}(\cos 128^o39'35'' + i \sin 128^o39'35'')$$

$$\sqrt[3]{z} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[6]{41}_{42^o53'12''} = \sqrt[6]{41}(\cos 42^o53'12'' + i \sin 42^o53'12'') \\ \sqrt[6]{41}_{162^o53'12''} = \sqrt[6]{41}(\cos 162^o53'12'' + i \sin 162^o53'12'') \\ \sqrt[6]{41}_{282^o53'12''} = \sqrt[6]{41}(\cos 282^o53'12'' + i \sin 282^o53'12'') \end{array} \right.$$

Problema 4 Sean $A(-4, -3)$, $B(4, 0)$ y $C(7, 11)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Calcular el cuarto vértice D.

b) La longitud de sus lados.

c) Los ángulos que forman.

d) Decidir de que figura geométrica se trata.

e) Su centro.

f) La altura sobre el lado $\overline{AB}$.

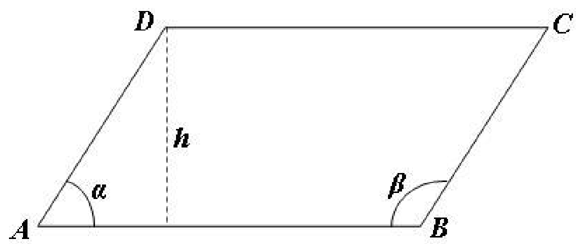
g) Su área.

h) El punto simétrico de A respecto de C

i) Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ con módulo 7.

j) Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres segmentos iguales.

Solución:



a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-4,-3) + (3,11) = (-1,8)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(8,3)| = \sqrt{73}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(3,11)| = \sqrt{130}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{57}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{130}} \Longrightarrow \alpha = 54^{o}11'20''$ y $\beta = 125^{o}48'40''$

d) Se trata de un paralelogramo, pero no es una figura concreta.

e) $M\left(\dfrac{3}{2},4\right)$

f)
$$\sin\alpha = \frac{h}{|\overrightarrow{AD}|} \Longrightarrow h = |\overrightarrow{AD}|\cdot\sin\alpha = 9,25\ u$$

g) $S = |\overrightarrow{AB}|\cdot h = 79\ u^2$

h) $C = \dfrac{A+A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (18,25)$

i) $\overrightarrow{AC} = (11, 14) \perp \overrightarrow{u} = (14, -11)$ y $\overrightarrow{w} = \left(\frac{98}{\sqrt{317}}, -\frac{77}{\sqrt{317}} \right)$ es un vector perpendicular al $\overrightarrow{AC}$, pero con módulo 7.

j)

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{11}{3}, \frac{14}{3} \right)$$

$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-4, -3) + \left(\frac{11}{3}, \frac{14}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right) + \left(\frac{11}{3}, \frac{14}{3} \right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{19}{3} \right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{10}{3}, \frac{19}{3} \right) + \left(\frac{11}{3}, \frac{14}{3} \right) = (7, 11)$$