Examen de Estadística

Mayo 2018

Problema 1 La mixomatosis es un enfermedad vírica que sólo afecta a los conejos (diseñada por el hombre) Se introdujo en Australia en el año 1950 para resolver los problemas agrarios que ocasinaban la descomunal cantidad de conejos de sus campos. Se calcula que en sólo dos año la población se rebajó de 600 millones a 100 millones de conejos. Es decir, el porcentaje de conejos contagiados es de 83,33 %. Si nos encontramos con 5 de ellos. Se pide calcular las siguientes probabilidades:

1. (0,5 puntos) Ninguno está contagiado.
2. (0,5 puntos) Todos están contagiado.
3. (0,75 puntos) Tres o menos de tres están contagiados.
4. (0,75 puntos) Mas de dos están contagiados.
5. (0,75 puntos) Dos o mas de dos y menos de cuatro están contagiados.

Solución:

$$B(5; 0,8333)$$

1. $P(X = 0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0,8333^0 \cdot 0,1667^5 = 0,000129$

2. $P(X = 5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 0,8333^5 \cdot 0,1667^0 = 0,4018$

3. $P(X \le 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5)) =$
$1 - \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 0,8333^4 \cdot 0,1667^1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 0,8333^5 \cdot 0,1667^0 \right) = 1 - 0,8037 = 0,1963$

4. $P(X > 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$
$1 - \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0,8333^0 \cdot 0,1667^5 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0,8333^1 \cdot 0,1667^4 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 0,8333^2 \cdot 0,1667^3 \right) = 1 - 0,0355 = 0,9645$

5. $P(2 \le X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) =$
$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 0,8333^2 \cdot 0,1667^3 + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 0,8333^3 \cdot 0,1667^2 = 0,1929$

Problema 2 Siguiendo con el enunciado del problema anterior, resulta que en una granja se agrupan una cantidad de 1000 conejos. Se plantean las siguientes preguntas:

1. (0,5 puntos) ¿Qué distribución se ajustaría a la situación planteada? ¿Qué tipo de distribución utilizaríamos para el tratamiento de datos? Calcular sus parámetros.
2. (0,5 puntos) Probabilidad de que haya más de 850 infectados.
3. (0,5 puntos) Probabilidad de que haya entre 801 y 861 infectados.
4. (0,5 puntos) Probabilidad de que haya entre 800 y 820 infectados.
5. (0,5 puntos) Probabilidad de que haya entre 850 y 861 infectados.
6. (0,5 puntos) Probabilidad de que haya menos de 817 infectados.
7. (0,5 puntos) Si se congregasen 3243 conejos ¿cuántos esperamos que estén infectados?

Solución

1.

$$p = 0,8333, \;\; q = 1 - p = 0,1667, \;\; n = 1000 \Longrightarrow B(1000; 0,8333)$$

Como $np > 5$ y $nq > 5$:

$$\mu = np = 1000 \cdot 0,8333 = 833,3, \;\; \sigma = \sqrt{npq} = 11,79 \Longrightarrow$$

$$N(833,3; 11,79)$$

2. $P(X > 850,5) = P\left(Z > \frac{850{,}5-833{,}3}{11{,}79}\right) = P(Z > 1,46) = 1 - P(Z < 1,46) = 1 - 0,9279 = 0,0721$

3. $P(801,5 < X < 860,5) = P\left(\frac{801{,}5-833{,}3}{11{,}79} < Z < \frac{860{,}5-833{,}3}{11{,}79}\right) = P\left(-2,70 < Z < 2,31\right) = P(Z < 2,31) - P(Z < -2,70) = P(Z < 2,31) - (1 - P(Z < 2,70)) = 0,9861$

4. $P(800,5 < X < 819,5) = P\left(\frac{800{,}5-833{,}3}{11{,}79} < Z < \frac{819{,}5-833{,}3}{11{,}79}\right) = P\left(-2,78 < Z < -1,17\right) = P(Z < -1,17) - P(Z < -2,78) = 1 - P(Z < 1,17) - (1 - P(Z < 2,78)) = 0,1183$

5. $P(850,5 < X < 860,5) = P\left(\frac{850{,}5-833{,}3}{11{,}79} < Z < \frac{860{,}5-833{,}3}{11{,}79}\right) = P\left(1,46 < Z < 2,31\right) = P(Z < 2,31) - P(Z < 1,46) = 0,0617$

6. $P(X < 816,5) = P\left(Z < \frac{816{,}5-833{,}3}{11{,}79}\right) = (Z < -1,42) = 1 - P\left(Z < 1,42\right) = 0,0778$

7. Si $n = 3243$ entonces $E[X] = np = 3243 \cdot 0,8333 = 2702,39$ como tiene que ser un número natural diríamos 2703 conejos.

Problema 3 El número de conejos que se salvan después de un tratamiento en una granja se puede aproximar por una distribución normal de media $\mu = 800$ conejos y desviación típica $\sigma = 30$ conejos. Se pide calcular la probabilidad de que se salven:

1. (0,5 puntos) más de 861 conejos.
2. (0,75 puntos) entre 762 y 847 conejos.
3. (0,75 puntos) entre 831 y 862 conejos.
4. (0,75 puntos) entre 749 y 771 conejos.
5. (0,5 puntos) menos de 756 conejos.

Solución:

$$N(8,3)$$

1. $P(X > 861) = P\left(Z > \frac{861-800}{30}\right) = P(Z > 2,03) = 1 - P(Z < 2,03) = 0,0212$
2. $P(762 < X < 847) = P\left(\frac{762-800}{30} < Z < \frac{847-800}{30}\right) = P(-1,27 < Z < 1,57) = P(Z < 1,57) - P(Z < -1,27) = P(Z < 1,57) - (1 - P(Z < 1,27)) = 0,8398$
3. $P(831 < X < 862) = P\left(\frac{831-800}{30} < Z < \frac{862-800}{30}\right) = P(1,03 < Z < 2,07) = P(Z < 2,07) - P(Z < 1,03) = 0,1323$
4. $P(749 < X < 771) = P\left(\frac{749-800}{30} < Z < \frac{771-800}{30}\right) = P(-1,7 < Z < -0,97) = P(Z < -0,97) - P(Z < -1,7) = 1 - P(Z < 0,97) - (1 - P(Z < 1,7)) = 0,1214$
5. $P(X < 756) = P\left(Z < \frac{756-800}{30}\right) = P(Z < -1,47) = 1 - P(Z < 1,47) = 0,0708$