

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

Abril 2018

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
- Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 2x^2 - 4 = 0 \implies (0, \pm 2)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 4)$.
-

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, +\infty)$
signo	+	-	+	-	+

- $f(-x) = f(x) \implies$ la función es PAR.
- Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

$$x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 1} = 2$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f)

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente	creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

La función es creciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

La función tiene un mínimo en el punto $(0, 4)$.

g)

$$f''(x) = -\frac{4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3} \neq 0$$

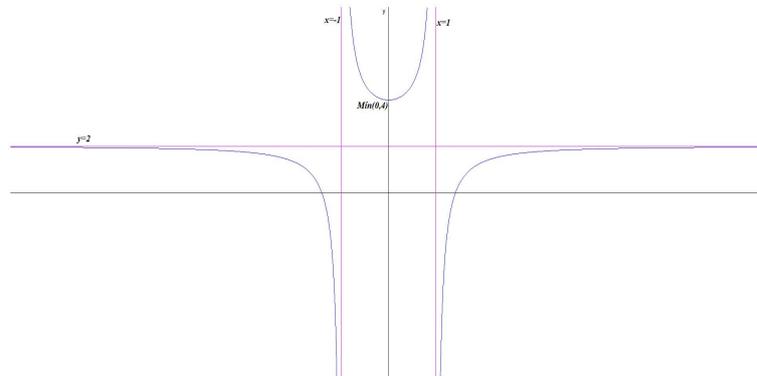
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	convexa \cap	cóncava \cup	convexa \cap

Convexa: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

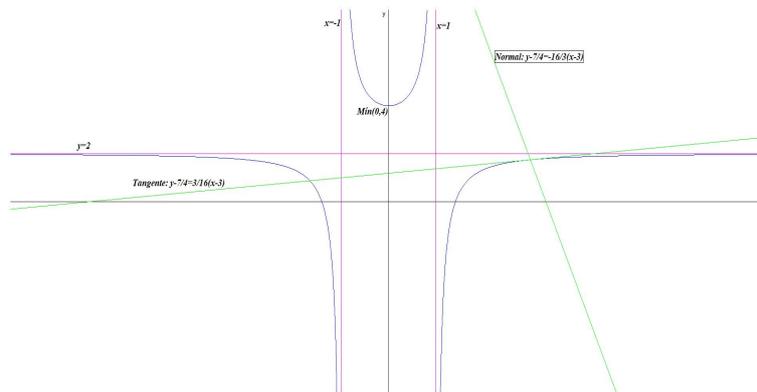
Cóncava: $(-1, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$:

Como $m = f'(3) = 3/19$ tenemos que



$$\text{Recta Tangente : } y - \frac{7}{4} = \frac{3}{16}(x - 3)$$

$$\text{Recta Normal : } y - \frac{7}{4} = -\frac{16}{3}(x - 3)$$

Como $f(3) = 7/4$ las rectas pasan por el punto $(3, 7/4)$.