Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

Abril 2018

Problema 1 (4 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 16}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados y su simetría.

b) (2 puntos) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

c) (1 punto) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 0$.

Solución:

a) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 5x = 0 \Longrightarrow (0,0)$ con OX.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.

$f(-x) = -f(x) \Longrightarrow$ la función es impar.

b) $f'(x) = -\dfrac{5(x^2-16)}{(x^2+16)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 16 = 0 \Longrightarrow x = \pm 4$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$, creciente en el intervalo $(-4, 4)$ con un mínimo en $\left(-4, -\dfrac{5}{8}\right)$ y un máximo en $\left(4, \dfrac{5}{8}\right)$

c) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 0$:
Como $m = f'(0) = 5/16$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y = \frac{5}{16}x$$

$$\text{Recta Normal}: \; y = -\frac{16}{5}x$$

Como $f(0) = 0$ las rectas pasan por el punto $(0, 0)$.

Problema 2 (2 puntos) Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3ax-2b}{2} & \text{si} \quad x < -1 \\ bx + a - 1 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ \frac{2ax-b}{3} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{3ax-2b}{2} = \dfrac{-3a-2b}{2} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (bx + a - 1) = -b + a - 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{-3a-2b}{2} = -b+a-1 \Longrightarrow a = 2/5$$

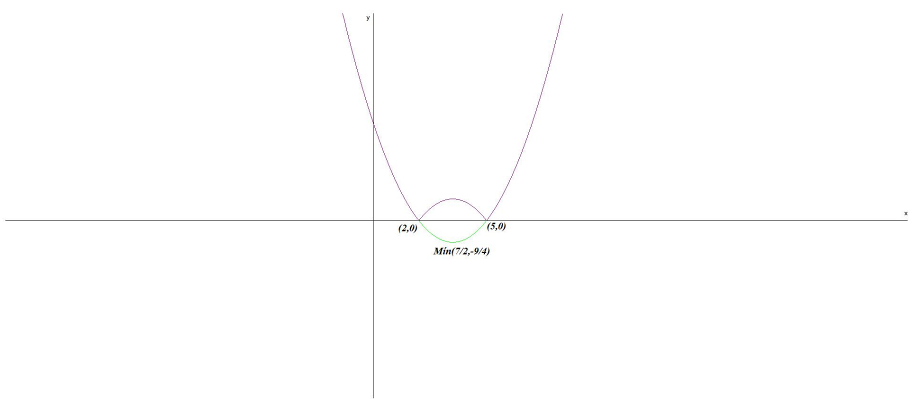
Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (bx + a - 1) = b + a - 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{2ax-b}{3} = \dfrac{2a-b}{3} \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{2a-b}{3} = b+a-1 \Longrightarrow a+4b = 3$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a = 2/5 \\ a + 4b = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 2/5 \\ b = 13/20 \end{array} \right.$$

Problema 3 (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 7x + 10|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - 7x + 10 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 7 = 0 \Longrightarrow x = 7/2$:



x	y
0	10
2	0
5	0
7/2	−9/4

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(7/2) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} x^2 - 7x + 10 & \text{si} & x \le 2 \\ -(x^2 - 7x + 10) & \text{si} & 2 < x \le 5 \\ x^2 - 7x + 10 & \text{si} & 5 \le x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^-} (x^2 - 7x + 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} (-x^2 + 7x - 10) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} (-x^2 + 7x - 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} (x^2 - 7x + 10) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - 7 & \text{si} & x \le 2 \\ -2x + 7 & \text{si} & 2 < x \le 5 \\ 2x - 7 & \text{si} & 5 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -3$ y $f'(2^+) = 3$, luego no es derivable en $x = 2$.
Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -3$ y $f'(5^+) = 3$, luego no es derivable en $x = 5$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{2, 5\}$.

Problema 4 (1 punto) Dada la función $f(x) = 2ax^2 - bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene

un extremo en el punto $(1,3)$. Decidir de que extremo se trata.
Solución:

$$f(x) = 2ax^2 - bx + c \Longrightarrow f'(x) = 4ax - b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \\ f(1) = 3 \Longrightarrow 2a - b + c = 3 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 4a - b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1/2 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{array}\right.$$

La función pedida es: $f(x) = -x^2 + 2x + 2$
$f'(x) = -2x + 2$ y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(1) = -2 < 0$ luego en $x = 1$ hay un máximo.

Problema 5 (2 puntos) Se trata de construir una piscina (prisma rectangular) de base rectangular, con la misma profundidad en toda ella. El largo de la piscina queremos que sea el triple del ancho y debe de contener 21 m^3 de agua, cunado está llena hasta el borde. Calcular las dimensiones que debe de tener si queremos gastarnos la menor cantidad de dinero en el alicatado interior. Calcular cuánto gastaremos si el m^2 de los azulejos que hemos elegido cuesta 21 euros.
Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} V = 21 = 3x^2y \Longrightarrow y = \dfrac{21}{3x^2} = \dfrac{7}{x^2} \\ \\ S(x,y) = 3x^2 + 6xy + 2xy = 3x^2 + 8xy \end{array}\right. \Longrightarrow S(x) = 3x^2 + \frac{56}{x}$$

$$S(x) = \frac{3x^3 + 56}{x^2} \Longrightarrow S'(x) = \frac{6x^2 - 56}{x^2} = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 56 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2,11$$

$$y = \frac{7}{2,11^2} = 1,57$$

	$(0;2,11)$	$(2,11;+\infty)$
$S'(x)$	$-$	$+$
$S(x)$	decreciente	creciente

Luego en $x = 2,11$ hay un mínimo. Las dimensiones serían 2,11 m de ancho, 6,33 m de largo y 1,57 m de alto.

El área que tenemos que alicatar es $s(2,11) = \dfrac{3 \cdot 2,11^3 + 56}{2,11^2} = 39,9$ m^2 luego el gasto sería: $39,9 \cdot 21 = 837,83$ euros.