Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Febrero 2018

Problema 1 (2 puntos) Encontrar todas las ecuaciones de la recta cuya ecuación general es $x-7y+1=0$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (7,1) \\ A(-1,0) \end{cases}$$

- Vectorial: $(x,y) = (-1,0) + \lambda(7,1)$
- Paramétrica: $\begin{cases} x = -1 + 7\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y}{1}$
- General: $x - 7y + 1 = 0$
- Explícita: $y = \dfrac{1}{7}x + \dfrac{1}{7}$
- Punto pendiente: $y = \dfrac{1}{7}(x+1)$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m = \tan\alpha = \dfrac{1}{7} \Longrightarrow \alpha = 8^{o}7'48''$

Problema 2 (5 puntos) Si los puntos $A(-1,-2)$, $B(7,-4)$ y $C(3,10)$ tres vértices consecutivos de un triángulo, se pide calcular

a) (1,5 puntos) el circuncentro.

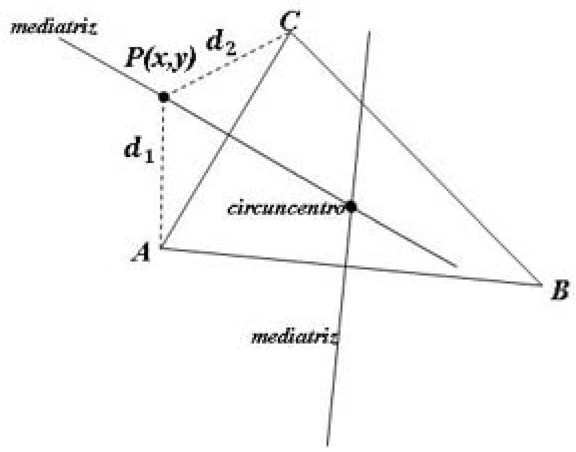
b) (2 puntos) sus ángulos y decidir que tipo de triángulo es.

c) (1,5 puntos) calcular la longitud de la altura sobre el lado AB y la ecuación de la recta que la define.

Solución:

a)
- Mediatriz entre A y B:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+4)^2} \Longrightarrow 4x - y - 15 = 0$$



- Mediatriz entre A y C:

$$\sqrt{((x+1)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-10)^2} \Longrightarrow x+13y-13=0$$

- Circuncentro:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x-y-15=0 \\ x+13y-13=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left(\frac{58}{13}, \frac{37}{13} \right)$$

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(8,-2)| = \sqrt{68}$, $|\overrightarrow{AC}| = |(4,12)| = \sqrt{160} = 2\sqrt{10}$:

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{32-24}{\sqrt{68}\cdot\sqrt{160}} \Longrightarrow \hat{A} = 85^o 36' 5''$$

$|\overrightarrow{BA}| = |(-8,2)| = \sqrt{68}$, $|\overrightarrow{BC}| = |(-4,14)| = \sqrt{212} = 2\sqrt{53}$:

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{32+28}{\sqrt{68}\cdot\sqrt{212}} \Longrightarrow \hat{B} = 60^o 1' 6''$$

$|\overrightarrow{CA}| = |(-4,-12)| = \sqrt{160} = 2\sqrt{10}$, $|\overrightarrow{CB}| = |(4,-14)| = \sqrt{212} = 2\sqrt{53}$:

$$\cos \hat{C} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{-16+168}{\sqrt{160}\cdot\sqrt{212}} \Longrightarrow \hat{C} = 34^o 22' 49''$$

Se trata de un triángulo escaleno.

c) $\overrightarrow{AB} = (8,-2) \perp \overrightarrow{u} = (2,8)$:
La recta que une A y B: $2x+8y+\lambda=0$ como tiene que pasar por $A(-1,-2) \Longrightarrow -2-16+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=18 \Longrightarrow t: 2x+8y+18=0$

$$\text{Altura} = d(C,t) = \frac{|6+80+18|}{\sqrt{4+64}} = \frac{52\sqrt{17}}{17}\ u$$

La recta que define esta altura tiene de ecuación $h_1 : 8x - 2y + \lambda = 0$ y, como pasa por $C(3, 10)$, tenemos $24 - 20 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -4 \Longrightarrow$ $h_1 : 8x - 2y - 4 = 0$

Problema 3 (3 puntos) Sea el punto $A(1, 7)$ y la recta $r : 2x - y + 2 = 0$. Se pide calcular:

a) (0,5 puntos) Una recta paralela a r que pase por el punto A.

b) (0,5 puntos) Una recta perpendicular a r que pase por el punto A.

c) (1 punto) El punto A'' simétrico de A respecto de la recta r.

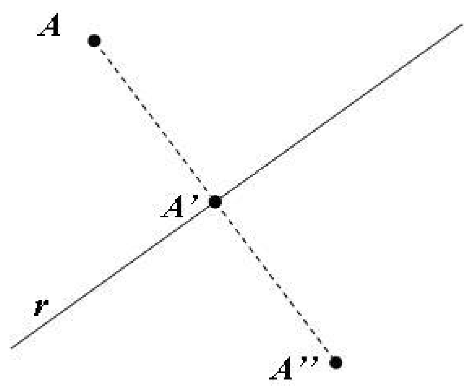
d) (1 punto) Las rectas bisectrices de r con $s : x - 2y + 1 = 0$.

Solución:

a) $2x-y+\lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 2-7+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 5$. La recta buscada es $h : 2x - y + 5 = 0$

b) $x + 2y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 1 + 14 + \lambda = 0 \Longrightarrow$ $\lambda = -15$. La recta buscada es $t : x + 2y - 15 = 0$

c) Calculamos A'' simétrico de A respecto de la recta r:



- Calculamos una recta t perpendicular a r y que pase por A, calculada en el apartado anterior.
- Calculamos el punto de corte entre r y t:

$$\left\{ \begin{array}{l} r : 2x - y + 2 = 0 \\ t : x + 2y - 15 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow A' \left(\frac{11}{5}, \frac{32}{5} \right)$$

- El punto A' calculado es el punto medio entre el punto A y el punto A'' que tenemos que calcular:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = 2 \left(\frac{11}{5}, \frac{32}{5} \right) - (1, 7) = \left(\frac{17}{5}, \frac{29}{5} \right)$$

d)

$$d(P,r)=d(P,s) \Longrightarrow \frac{|2x-y+2|}{\sqrt{5}}=\frac{|x-2y+1|}{\sqrt{5}} \Longrightarrow |2x-y+2|=|x-2y+1|$$

- $2x-y+2=x-2y+1 \Longrightarrow x+y+1=0$
- $2x-y+2=-x+2y-1 \Longrightarrow x-y+1=0$