Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Enero 2018

Problema 1 Dados los números complejos $z_1 = -3 + 2i$ y $z_2 = 4 + 5i$. Se pide calcular:

a) $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$

b) $z_1 \cdot z_2$

c) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Solución:

a) $z_1 + z_2 = 1 + 7i$ y $z_1 - z_2 = -7 - 3i$

b) $z_1 \cdot z_2 = -22 - 7i$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{2}{41} + \dfrac{23}{41}i$

Problema 2 Si $z = 3 - 2i$ calcular z^{10}.

Solución:

$$z = 3 - 2i = \sqrt{13}_{326^{\text{o}}18'36''} = \sqrt{13}(\cos 326^{\text{o}}18'36'' + i \sin 326^{\text{o}}18'36'')$$

$$z^{10} = (3 - 8i)^{10} = 13^5_{10\cdot 326^{\text{o}}18'36''} = 13^5_{3263^{\text{o}}5'58''} = 13^5_{23^{\text{o}}5'58''} =$$

$$13^5(\cos 23^{\text{o}}5'58'' + i \sin 23^{\text{o}}5'58'') = (341525 + 145668i)$$

Problema 3 Calcular las raices de $\sqrt[3]{-1 + 5i}$

Solución:

$$z = -1 + 5i = \sqrt{26}_{101^{\text{o}}18'36''} = \sqrt{26}(\cos 101^{\text{o}}18'36'' + i \sin 101^{\text{o}}18'36'')$$

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[6]{26}_{33^{\text{o}}46'12''} = \sqrt[6]{26}(\cos 33^{\text{o}}46'12'' + i \sin 33^{\text{o}}46'12'') \\ \sqrt[6]{26}_{153^{\text{o}}46'12''} = \sqrt[6]{26}(\cos 153^{\text{o}}46'12'' + i \sin 153^{\text{o}}46'12'') \\ \sqrt[6]{26}_{273^{\text{o}}46'12''} = \sqrt[6]{26}(\cos 273^{\text{o}}46'12'' + i \sin 273^{\text{o}}46'12'') \end{cases}$$

Problema 4 Sean $A(-4, -1)$, $B(4, 1)$ y $C(8, 11)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Calcular el cuarto vértice D.

b) La longitud de sus lados.

c) Los ángulos que forman.

d) Decidir de que figura geométrica se trata.

e) Su centro.

f) La altura sobre el lado $\overline{AB}$.

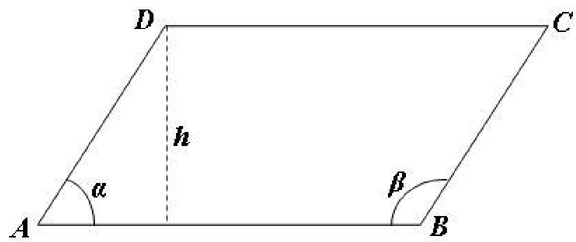
g) Su área.

h) El punto simétrico de A respecto de C

i) Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ con módulo 7.

j) Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres segmentos iguales.

Solución:



a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-4, -1) + (4, 10) = (0, 9)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(8, 2)| = 2\sqrt{17}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(4, 10)| = 2\sqrt{29}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{52}{2\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{29}} \Longrightarrow \alpha = 54^o 9' 44''$ y $\beta = 125^o 50' 16''$

d) Se trata de un paralelogramo, pero no es una figura concreta.

e) $M\,(2, 5)$

f)
$$\sin\alpha = \frac{h}{|\overrightarrow{AD}|} \Longrightarrow h = |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin\alpha = 8,73\ u$$

g) $S = |\overrightarrow{AB}| \cdot h = 72\ u^2$

h) $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (20, 23)$

i) $\overrightarrow{AC} = (12,12) \perp \overrightarrow{u} = (12,-12) = 12(1,-1)$ y $\overrightarrow{w} = \left(\frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{\sqrt{2}}\right)$ es un vector perpendicular al $\overrightarrow{AC}$, pero con módulo 7.

j)

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = (4,4)$$

$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-4,-1) + (4,4) = (0,3)$$

$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = (0,3) + (4,4) = (4,7)$$

$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = (4,7) + (4,4) = (8,11)$$