Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

Junio 2017

Problema 1 *(4 puntos)*Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 5}{x + 5}$$

se pide:

a) Calcular sus asíntotas

b) Estudiar su monotonía y extremos relativos.

c) Calcular la recta tangente a f en el punto de abcisa $x = 1$

Solución:

a)
- **Verticales:** $x = -5$

$$\lim_{x \longrightarrow -5} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^-} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \left[\frac{25}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^+} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \left[\frac{25}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 5}{x^2 + 5x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 5}{x + 5} - x\right) = -4$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x - 4$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2+10x}{(x+5)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -10$:

	$(-\infty, -10)$	$(-10, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -10) \cup (0, +\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-10, -5) \cup (-5, 0)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-10, -19)$ y un mínimo en $(0, 1)$.

c) $b = f(a) = f(1) = 7/6$, $m = f'(a) = f'(1) = 11/36$, luego la recta tangente a la función es: $y - 7/6 = 11/36(x-1)$

Problema 2 *(3 puntos)*Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & z = & 2 \\ 2x- & y+ & 3z = & 2 \\ x+ & 7y- & 6z = & 4 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & +z = & 5 \\ 2x- & y+ & z = & 4 \\ 3x+ & y- & 2z = & -2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & z = & 2 \\ 2x- & y+ & 3z = & 2 \\ x+ & 7y- & 6z = & 4 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6/5 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & +z = & 5 \\ 2x- & y+ & z = & 4 \\ 3x+ & y- & 2z = & -2 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{array}\right.$$

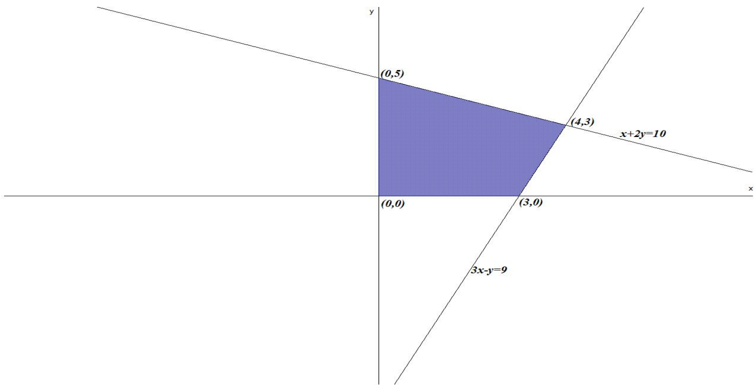
Problema 3 *(2 puntos)*Encontrar el valor máximo y mínimo de la función objetivo $z(x, y) = 4x - 3y$ sujeto a las restricciones (Región factible):

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y \le 10 \\ 3x - y \le 9 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right.$$

Solución:

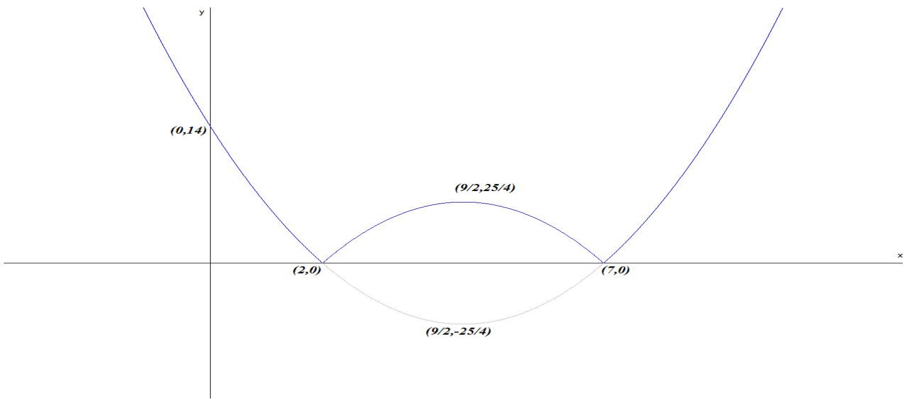
$$\left\{\begin{array}{l} z(0,0) = 0 \\ z(3,0) = 12 \\ z(0,5) = -15 \\ z(4,3) = 7 \end{array}\right.$$

El valor máximo se alcanza en el punto $(3, 0)$ y es de 12, mientras que el valor mínimo se alcanza en el punto $(0, 5)$ y es de -15.



Problema 4 *(1 punto)*Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 9x + 14|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - 9x + 14 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 9 = 0 \Longrightarrow x = 9/2$:



x	y
0	14
2	0
7	0
$9/2$	$-25/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(\frac{9}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{9}{2}, -\frac{25}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto:

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9x + 14 & \text{si} \quad x \le 2 \\ -(x^2 - 9x + 14) & \text{si} \quad 2 < x \le 7 \\ x^2 - 9x + 14 & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (x^2 - 9x + 14) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (-x^2 + 9x - 14) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Y f es continua en $x = 7$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^-} (-x^2 + 9x - 14) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^+} (x^2 - 9x + 14) = 0$$

$$f(7) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 9 & \text{si} \quad x \le 2 \\ -2x + 9 & \text{si} \quad 2 < x \le 7 \\ 2x - 9 & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -5$ y $f'(2^+) = 5$, luego no es derivable en $x = 2$.
Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -5$ y $f'(7^+) = 5$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{2, 7\}$.