Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

Marzo 2016

Problema 1 Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{3x^2+9}{x+1}$$

se pide:

a) Calcular sus asíntotas

b) Estudiar su monotonía y extremos relativos.

c) Calcular la recta tangente a f en el punto de abcisa $x = 2$

Solución:

a)
- **Verticales:** $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1} \frac{3x^2+9}{x+1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{3x^2+9}{x+1} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{3x^2+9}{x+1} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x^2+9}{x+1} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2+9}{x^2+x} = 3$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{3x^2+9}{x+1} - 3x\right) = -3$$

Luego la asíntota oblicua es $y = 3x - 3$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x - 9}{(x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 1$:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-3, -1) \cup (-1, 1)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-3, -18)$ y un mínimo en $(1, 6)$.

c) $b = f(a) = f(2) = 7$, $m = f'(a) = f'(2) = \dfrac{5}{3}$, luego la recta tangente a la función es: $y - 7 = \dfrac{5}{3}(x - 2)$

Problema 2 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcc} \frac{ax-3b}{2} & \text{si} & x < -1 \\ bx + 2 & \text{si} & -1 \le x < 1 \\ 3ax - 4b & \text{si} & x \ge 1 \end{array} \right.$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{ax - 3b}{2} = \dfrac{-a - 3b}{2} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (bx + 2) = -b + 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \dfrac{-a - 3b}{2} = -b+2 \Longrightarrow a+b = -4$$

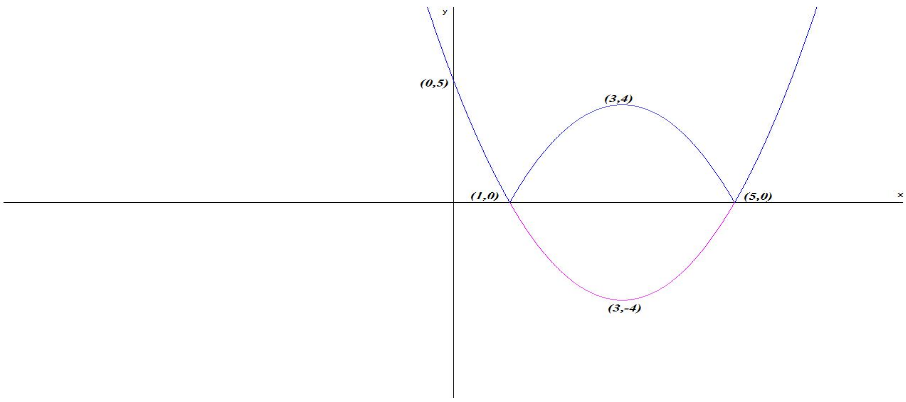
Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (bx + 2) = b + 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (3ax - 4b) = 3a - 4b \end{array} \right. \Longrightarrow b+2 = 3a-4b \Longrightarrow 3a-5b = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = -4 \\ 3a - 5b = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -9/4 \\ b = -7/4 \end{array} \right.$$

Problema 3 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - 6x + 5 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$:



x	y
0	5
1	0
5	0
3	-4

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(3) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(3, -4)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(3, 4)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -(x^2 - 6x + 5) & \text{si} \quad 1 < x \le 5 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (-x^2 + 6x - 5) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} (-x^2 + 6x - 5) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} (x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x + 6 & \text{si} \quad 1 < x \le 5 \\ 2x - 6 & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = -4$ y $f'(1^+) = 4$, luego no es derivable en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -4$ y $f'(5^+) = 4$, luego no es derivable en $x = 5$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{1, 5\}$.

Problema 4 Dada la función $f(x) = 4ax^2 - 2bx + 3c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 3)$ y tiene un extremo en el punto $(3, 2)$
Solución:

$$f(x) = 4ax^2 - 2bx + 3c \Longrightarrow f'(x) = 8ax - 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 3 \Longrightarrow 3c = 3 \Longrightarrow c = 1 \\ f(3) = 2 \Longrightarrow 36a - 6b + 3c = 2 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 24a - 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/36 \\ b = 1/3 \\ c = 1 \end{array}\right.$$

La función pedida es: $f(x) = \dfrac{1}{9}x^2 + \dfrac{2}{3}x + 3$