Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

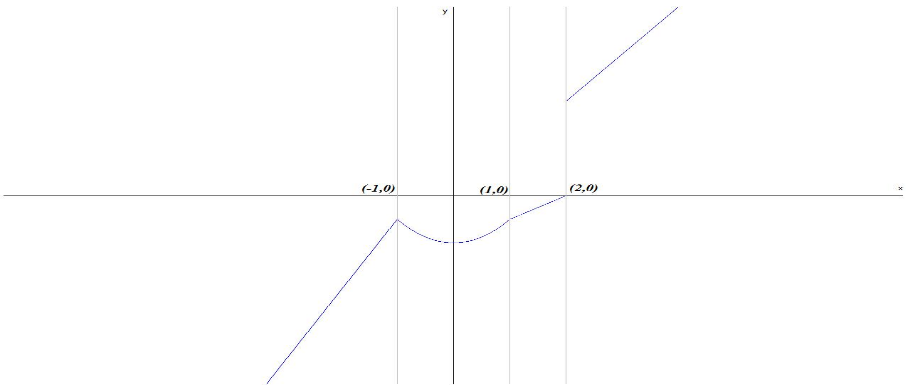
Marzo 2016

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2-2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ x-2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.

Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - 2ax + 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (3ax^2 - 2bx + 1) = 3a - 2b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 - 2ax + 3) = b - 2a + 3$$

$$3a - 2b + 1 = b - 2a + 3 \Longrightarrow 5a - 3b = 2$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - 2a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 6a - 2b; \;\; f'(1^+) = 2b - 2a \Longrightarrow 6a - 2b = 2b - 2a \Longrightarrow 2a - b = 0$$

$$\begin{cases} 5a - 3b = 2 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2ax-3b}{2} & \text{si} & x < -1 \\ bx - 2 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{3ax-4b}{2} & \text{si} & x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{2ax - 3b}{2} = \dfrac{-2a - 3b}{2} \\ \lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} (bx - 2) = -b - 2 \end{cases} \Longrightarrow \frac{-2a - 3b}{2} = -b-2 \Longrightarrow 2a+b = 4$$

Continuidad en $x = 1$:

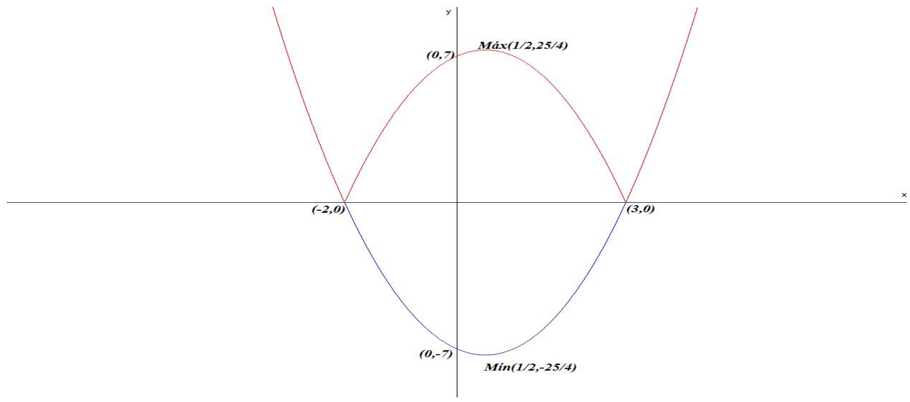
$$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (bx - 2) = b - 2 \\ \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{3ax - 4b}{2} = \dfrac{3a - 4b}{2} \end{cases} \Longrightarrow \frac{3a - 4b}{2} = b-2 \Longrightarrow 3a-6b = -4$$

$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ 3a - 6b = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 4/3 \\ b = 4/3 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - x - 6|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - x - 6 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1/2$:

x	y
0	-6
3	0
-2	0
$1/2$	$-25/4$



$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(1/2) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si} \quad x \le -2 \\ -(x^2 - x - 6) & \text{si} \quad -2 < x \le 3 \\ x^2 - x - 6 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^-} (x^2 - x - 6) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} (-x^2 + x + 6) = 0$$

$$f(-2) = 0$$

Y f es continua en $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^-} (-x^2 + x + 6) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^+} (x^2 - x - 6) = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x \le -2 \\ -2x + 1 & \text{si} \quad -2 < x \le 3 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -2$: $f'(-2^-) = -5$ y $f'(-2^+) = 5$, luego no es derivable en $x = -2$.
Derivabilidad en $x = 3$: $f'(3^-) = -5$ y $f'(3^+) = 5$, luego no es derivable en $x = 3$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{-2, 3\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = 3ax^2 - bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 3)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 5)$

Solución:

$$f(x) = 3ax^2 - bx + c \Longrightarrow f'(x) = 6ax - b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 3 \Longrightarrow c = 3 \\ f(2) = 5 \Longrightarrow 12a - 2b + c = 5 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a - b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1/6 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{array}\right.$$

La función pedida es: $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 3$