Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)
Junio 2017

Problema 1 *(4 puntos)*Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x - 5}$$

se pide:

a) Calcular sus asíntotas

b) Estudiar su monotonía y extremos relativos.

c) Calcular la recta tangente a f en el punto de abcisa $x = 0$

Solución:

a)
- **Verticales:** $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 1}{x - 5} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} \frac{x^2 - 5x + 1}{x - 5} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} \frac{x^2 - 5x + 1}{x - 5} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{x - 5} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 5x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 1}{x - 5} - x\right) = 0$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 24}{(x-5)^2} = 0 \Longrightarrow x = 4$ y $x = 6$:

	$(-\infty, 4)$	$(4, 6)$	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(4, 5) \cup (5, 6)$.

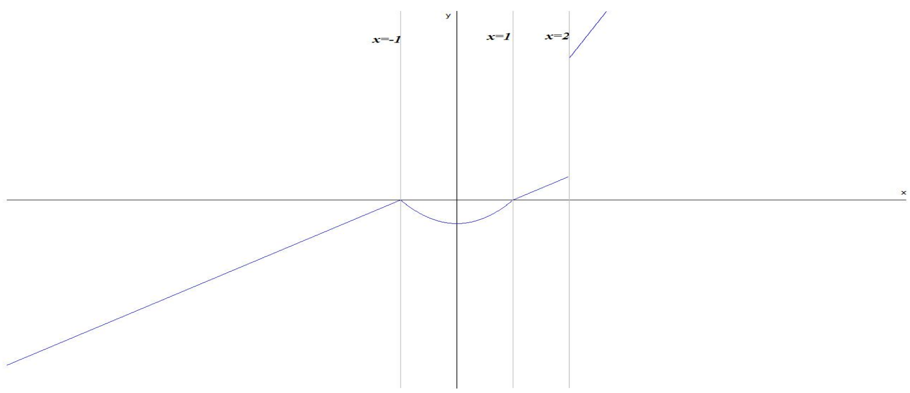
La función tiene un máximo en el punto $(4, 3)$ y un mínimo en $(6, 7)$.

c) $b = f(a) = f(0) = -1/5$, $m = f'(a) = f'(0) = 24/25$, luego la recta tangente a la función es: $y + \frac{1}{5} = \frac{24}{25}x$

Problema 2 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 7 & \text{si} \quad x = 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 3x & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evible(salto).

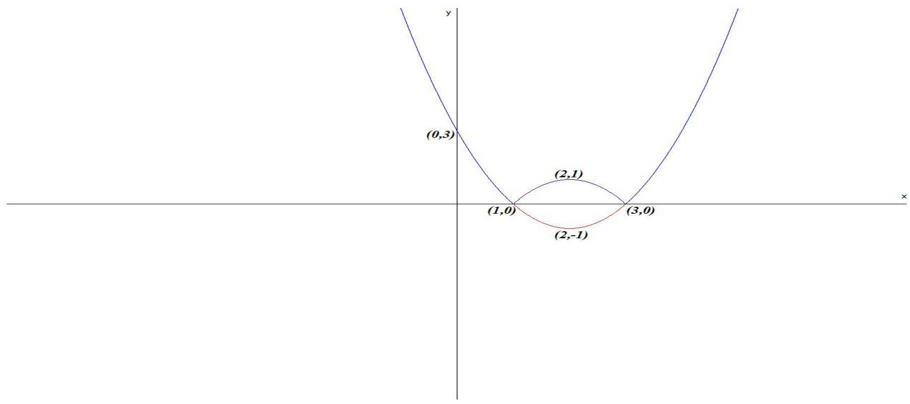
Problema 3 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ y representarla gráficamente.

Solución:

Hacemos $g(x)=x^2-4x+3 \Longrightarrow g'(x)=2x-4=0 \Longrightarrow x=2$:

x	y
0	3
1	0
3	0
2	-1

$g''(x)=2 \Longrightarrow g''(2)>0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(2,-1)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(2,1)$



$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} x^2-4x+3 & \text{si} & x\le 1\\ -(x^2-4x+3) & \text{si} & 1<x\le 3\\ x^2-4x+3 & \text{si} & 3\le x \end{array}\right.$$

Continuidad en $x=1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-}(x^2-4x+3)=0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^+}(-x^2+4x-3)=0$$

$$f(1)=0$$

Y f es continua en $x=3$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 3^-}(-x^2+4x-3)=0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 5^+}(x^2-4x+3)=0$$

$$f(3) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x + 4 & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \\ 2x - 4 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = -2$ y $f'(1^+) = 2$, luego no es derivable en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 3$: $f'(3^-) = -2$ y $f'(3^+) = 2$, luego no es derivable en $x = 3$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{1, 3\}$.

Problema 4 *(2 puntos)*Dada la función $f(x) = x^3 - 2ax^2 + bx - 2c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 3$
Solución:

$$f(x) = x^3 - 2ax^2 + bx - 2c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 4ax + b \Longrightarrow f''(x) = 6x - 4a$$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \Longrightarrow -2c = 2 \Longrightarrow c = -1 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12 - 8a + b = 0 \\ f''(3) = 0 \Longrightarrow 18 - 4a = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 9/2 \\ b = 24 \\ c = -1 \end{cases}$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 2$