Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)
Mayo 2017

Problema 1 *(4 puntos)*Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3}$$

se pide:

a) Calcular sus asíntotas

b) Estudiar su monotonía y extremos relativos.

c) Calcular la recta tangente a f en el punto de abcisa $x = 0$

Solución:

a)
- **Verticales:** $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 3x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3} - x\right) = 0$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x$

b) $f'(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=0\Longrightarrow x=1$ y $x=5$:

	$(-\infty,1)$	$(1,5)$	$(5,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(1,3)\cup(3,5)$.

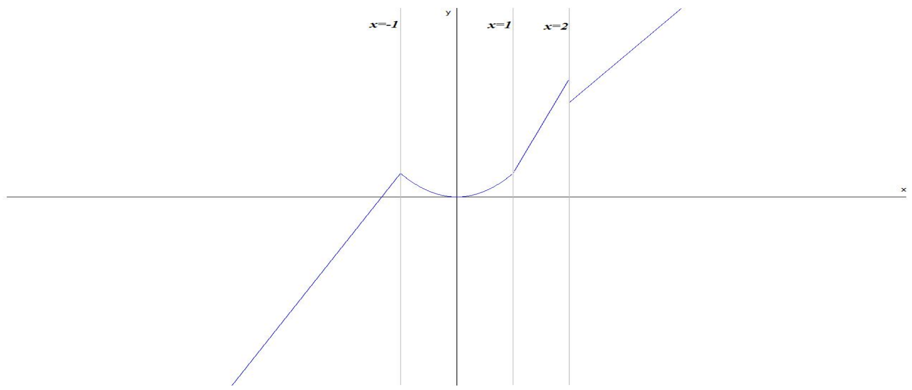
La función tiene un máximo en el punto $(1,-1)$ y un mínimo en $(5,7)$.

c) $b=f(a)=f(0)=-4/3$, $m=f'(a)=f'(0)=5/9$, luego la recta tangente a la función es: $y+4/3=5/9x$

Problema 2 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+4 & \text{si} & x<-1\\ x^2 & \text{si} & -1\le x<1\\ 5 & \text{si} & x=1\\ 4x-3 & \text{si} & 1<x<2\\ 2x & \text{si} & 2\le x\end{cases}$$

en los puntos $x=-1$, $x=1$ y en $x=2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x=-1$ es continua , en $x=1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x=2$ es discontinua no evible(salto).

Problema 3 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=|x^2-9x+8|$ y representarla gráficamente.

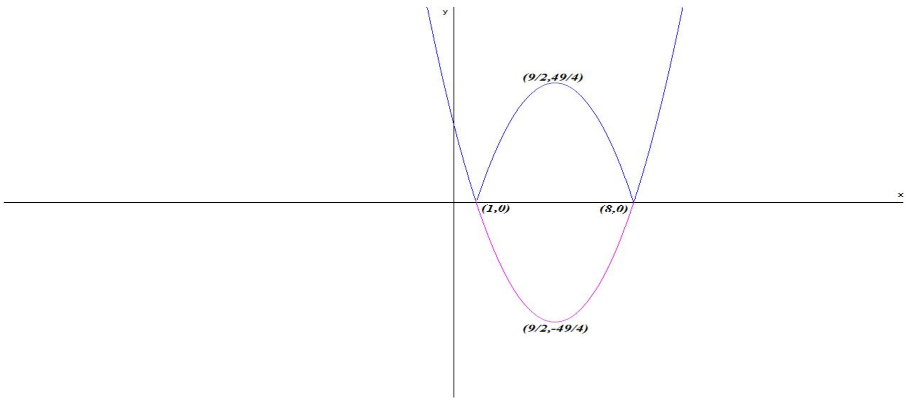
Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 - 9x + 8 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 9 = 0 \Longrightarrow x = 9/2$:

x	y
0	8
1	0
8	0
$9/2$	$-49/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(\frac{9}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{9}{2}, -\frac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto:

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{49}{4}\right)$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9x + 8 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -(x^2 - 9x + 8) & \text{si} \quad 1 < x \le 8 \\ x^2 - 9x + 8 & \text{si} \quad 8 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - 9x + 8) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (-x^2 + 9x - 8) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Y f es continua en $x = 8$

$$\lim_{x \longrightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 8^-} (-x^2 + 9x - 8) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 8^+} (x^2 - 9x + 8) = 0$$

$$f(8) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 9 & \text{si} & x \le 1 \\ -2x + 9 & \text{si} & 1 < x \le 8 \\ 2x - 9 & \text{si} & 8 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = -7$ y $f'(1^+) = 7$, luego no es derivable en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 8$: $f'(8^-) = -7$ y $f'(8^+) = 7$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{1, 8\}$.

Problema 4 *(2 puntos)*Dada la función $f(x) = 3ax^2 + 4bx - 3c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, -3)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 6)$
Solución:

$$f(x) = 3ax^2 + 4bx - 3c \Longrightarrow f'(x) = 6ax + 4b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = -3 \Longrightarrow -3c = -3 \Longrightarrow c = 1 \\ f(2) = 6 \Longrightarrow 12a + 8b - 3c = 6 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a + 4b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -3/4 \\ b = 9/4 \\ c = 1 \end{array} \right.$$

La función pedida es: $f(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 9x - 3$