Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)
Abril 2017

Problema 1 *(4 puntos)*Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 9}{x - 3}$$

se pide:

a) Calcular sus asíntotas

b) Estudiar su monotonía y extremos relativos.

c) Calcular la recta tangente a f en el punto de abcisa $x = 1$

Solución:

a)
- **Verticales:** $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 9}{x - 3} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3x + 9}{x - 3} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x + 9}{x - 3} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 9}{x - 3} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 9}{x^2 - 3x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 9}{x - 3} - x\right) = 0$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x$

b) $f'(x) = \dfrac{x(x-6)}{(x-3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 6$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 6)$	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, 4)$.

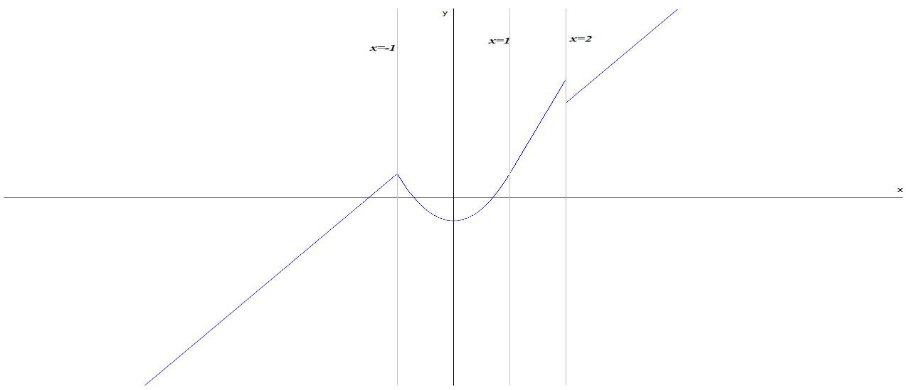
La función tiene un máximo en el punto $(0, -3)$ y un mínimo en $(6, 9)$.

c) $b = f(a) = f(1) = -\frac{7}{2}$, $m = f'(a) = f'(1) = -\frac{5}{4}$, luego la recta tangente a la función es: $y + \frac{7}{2} = -\frac{5}{4}(x - 1)$

Problema 2 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad de la siguiente función:

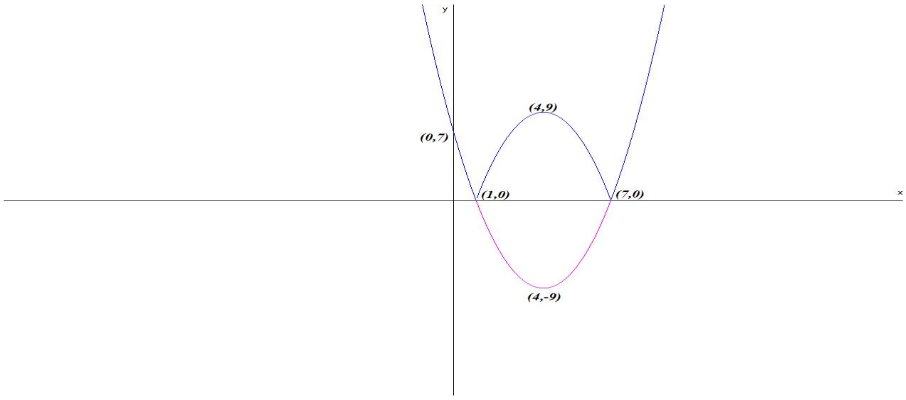
$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 5 & \text{si} \quad x = 1 \\ 4x - 3 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evible(salto).

Problema 3 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 7x - 8|$ y representarla gráficamente.



Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 - 7x - 8 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 7 = 0 \Longrightarrow x = 7/2$:

x	y
0	-7
-1	0
8	0
$7/2$	$-81/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(7/2) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\dfrac{7}{2}, -\dfrac{81}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\dfrac{7}{2}, -\dfrac{81}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - 7x - 8 & \text{si} & x \le -1 \\ -(x^2 - 7x - 8) & \text{si} & -1 < x \le 8 \\ x^2 - 7x - 8 & \text{si} & 8 \le x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} (x^2 - 7x - 8) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} (-x^2 + 7x + 8) = 0$$

$$f(-1) = 0$$

Y f es continua en $x = 8$

$$\lim_{x \longrightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 8^-} (-x^2 + 7x + 8) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 8^+} (x^2 - 7x - 8) = 0$$

$$f(8) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 7 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -2x + 7 & \text{si} \quad -1 < x \leq 8 \\ 2x - 7 & \text{si} \quad 8 \leq x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -1$: $f'(-1^-) = -9$ y $f'(-1^+) = 9$, luego no es derivable en $x = -1$.
Derivabilidad en $x = 8$: $f'(8^-) = -9$ y $f'(8^+) = 9$, luego no es derivable en $x = 8$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{-1, 8\}$.

Problema 4 *(2 puntos)*Dada la función $f(x) = 5ax^2 - 2bx + 3c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 3)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 7)$
Solución:

$$f(x) = 5ax^2 - 2bx + 3c \Longrightarrow f'(x) = 10ax - 2b$$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \Longrightarrow 3c = 3 \Longrightarrow c = 1 \\ f(2) = 7 \Longrightarrow 20a - 4b + 3c = 7 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 20a - 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1/5 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

La función pedida es: $f(x) = -x^2 + 4x + 3$