Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

Abril 2017

Problema 1 Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 12}{x - 2}$$

se pide:

a) Calcular sus asíntotas

b) Estudiar su monotonía y extremos relativos.

c) Calcular la recta tangente a f en el punto de abcisa $x = 1$

Solución:

a)
- **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x + 12}{x - 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 6x + 12}{x - 2} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{3x^2 - 6x + 12}{x - 2} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x^2 - 6x + 12}{x - 2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2 - 6x + 12}{x^2 - 2x} = 3$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{3x^2 - 6x + 12}{x - 2} - 3x\right) = 0$$

Luego la asíntota oblicua es $y = 3x$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 12x}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 4$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, 4)$.

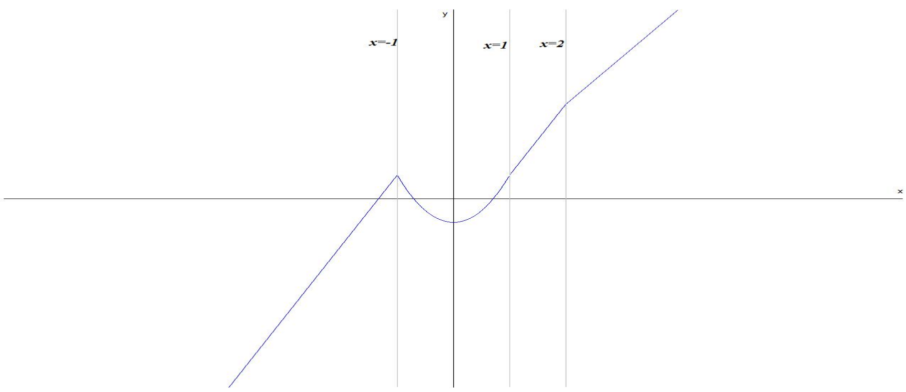
La función tiene un máximo en el punto $(0, -6)$ y un mínimo en $(4, 18)$.

c) $b = f(a) = f(1) = -9$, $m = f'(a) = f'(1) = -9$, luego la recta tangente a la función es: $y + 9 = -9(x - 1)$

Problema 2 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

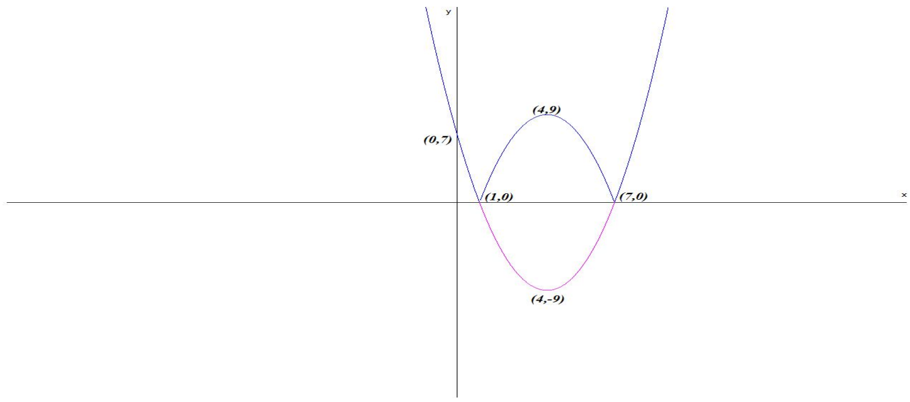
$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ 3x - 2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es continua.

Problema 3 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 8x + 7|$ y representarla gráficamente.



Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - 8x + 7 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = 4$:

x	y
0	7
1	0
7	0
4	-9

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(3) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(4, -9)$.
La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(4, 9)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 7 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -(x^2 - 8x + 7) & \text{si} \quad 1 < x \le 7 \\ x^2 - 8x + 7 & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - 8x + 7) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (-x^2 + 8x - 7) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Y f es continua en $x = 7$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^-} (-x^2 + 8x - 7) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^+} (x^2 - 8x + 7) = 0$$

$$f(7) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-8 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x+8 & \text{si} \quad 1 < x \le 7 \\ 2x-8 & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = -6$ y $f'(1^+) = 6$, luego no es derivable en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -6$ y $f'(7^+) = 6$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{1, 7\}$.

Problema 4 Dada la función $f(x) = 3ax^2 - bx + 5c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 5)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 6)$
Solución:

$$f(x) = 3ax^2 - bx + 5c \Longrightarrow f'(x) = 6ax - b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 5 \Longrightarrow 5c = 5 \Longrightarrow c = 1 \\ f(2) = 6 \Longrightarrow 12a - 2b + 5c = 6 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a - b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1/12 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{array} \right.$$

La función pedida es: $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + x + 5$