Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2017

Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-3,0)$, $B(0,5)$ y $C(1,1)$. Obtener su centro, su radio.

Solución:

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

$$\left\{\begin{array}{c} -3m+p=-9\\ 5n+p=-25\\ m+n+p=-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=3\\ n=-5\\ p=0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2+3x-5y=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m=-2a=3\Longrightarrow a=-\frac{3}{2}\\ n=-2b=-5\Longrightarrow b=\frac{5}{2}\\ p=0=a^2+b^2-r^2\Longrightarrow r=\frac{\sqrt{34}}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro}=\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right),\quad r=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

Problema 2 Sea $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{25}=1$ la ecuación de una elipse horizontal. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$a^2=36\Longrightarrow a=6,\quad b^2=25\Longrightarrow b=5$$

$$a^2=b^2+c^2\Longrightarrow c=\sqrt{11}\quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{11}}{6}$$

Eje Mayor$=2a=12$
Eje Menor$=2b=10$
Distancia Focal$=2c=2\sqrt{11}$
Excentricidad$=e=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$
Vértices: $A(6,0)$, $A'(-6,0)$, $B(0,5)$, $B(0,-5)$
Focos: $F(\sqrt{11},0)$, $F'(-\sqrt{11},0)$
Ecuación general: $25x^2+36y^2=900$

Problema 3 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 4 cm y tiene una excentricidad $e=\dfrac{1}{3}$. Calcular los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}\Longrightarrow a=3c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 9c^2 = 4 + c^2 \Longrightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a = 3c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Eje Mayor$= 2a = 3\sqrt{2}$
Eje Menor$= 2b = 4$
Distancia Focal$= 2c = \sqrt{2}$
Excentricidad$= e = \dfrac{1}{3}$
Vértices: $A\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $A'\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $B(0,2)$, $B'(0,-2)$
Focos: $F\left(\sqrt{2}, 0\right)$, $F'\left(-\sqrt{2}, 0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{9/2} + \frac{y^2}{4} = 1 \Longrightarrow \frac{2x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Ecuación general: $8x^2 + 9y^2 = 36$

Problema 4 Encontrar los puntos de la recta

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2}$$

que se encuentran a una distancia 5 del punto $P(1, -2)$.
Solución:
Construimos la circunferencia de centro P y radio 5:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

Cortamos r con esta circunferencia; para ello ponemos r en paramétricas: $r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$ y sustituimos en la circunferencia:

$$(1+2\lambda)^2 + (3+2\lambda)^2 = 25 \Longrightarrow 5\lambda^2 + 14\lambda - 15 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0,83, \quad \lambda_2 = -3,63$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0,83 \Longrightarrow P_1(2,83; 2,66) \\ \lambda_2 = -3,63 \Longrightarrow P_2\left(-1,63; -6,26\right) \end{cases}$$

Problema 5 La espeleología es la gran afición de unos amigos que habían estudiado el bachillerato en el colegio Villaeuropa de Móstoles, se habían citado antiguos compañeros de clase, para la exploración de una cueva. Cuando llevan unas horas entre pasadizos se dan cuenta que frente a ellos hay un río subterráneo que los rodea. La situación es delicada, el terreno es muy inestable y ese río podría cambiar su rumbo. Ellos comprueban que la distancia desde la sala en la que se encuentran hasta el río y la distancia del río

hasta una galería rectilínea que conocían es siempre la misma. Automáticamente sacaron un plano para situar la sala en el punto $F(-2,1)$ y la galería seguiría la ecuación de la recta $2x+y=0$.
Uno de los alumnos que conoce bastante la zona les comenta que puede ser muy peligroso estar a menos de 200 metros del río. (escala $1:100$)

Se pide:

a) Identifica de que curva se trata.

b) Calcular la ecuación de esta curva.

c) Calcular las tangentes a la curva en los puntos en los que corta la recta $x=-5$

d) ¿Estarían en peligro?

Solución:

a) Se trata de una parábola por definición.

b) Sea $P(x,y)$ un punto de esa parábola, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{AP}| = d(P,r)$$

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} = \frac{|2x+y|}{\sqrt{5}} \Longrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2 = \frac{(2x+y)^2}{5}$$

$$\Longrightarrow x^2+4y^2-4xy+20x-10y+25=0$$

c) En $x=-5 \Longrightarrow 2y^2+5y-25=0 \Longrightarrow y_1=\frac{5}{2}\ \ y_2=-5$:

$$P_1\left(-5,\frac{5}{2}\right) \quad P_2\left(-5,-5\right)$$

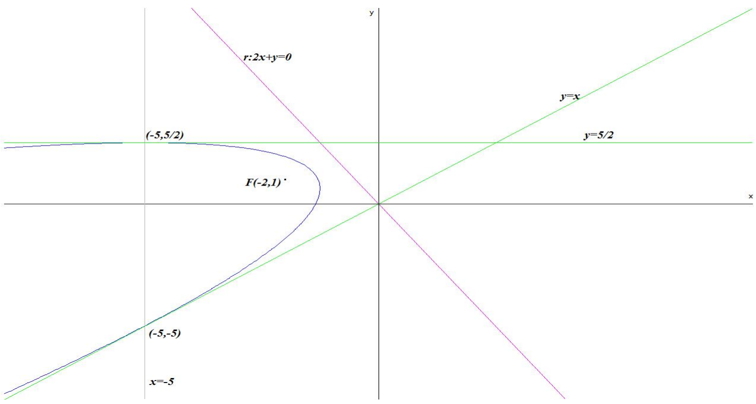
$$2xdx+8ydy-4ydx-4xdy+20dx-10dy=0 \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x-4y+20}{-4x+8y-10}$$

En $P_1\left(-5,\dfrac{5}{2}\right) \Longrightarrow m=0 \Longrightarrow y-\dfrac{5}{2}=0$

$P_2(-5,-5) \Longrightarrow m=1 \Longrightarrow y=x$

d) Claramente estarían en peligro.


y
r:2x+y=0
y=x
(-5,5/2)
y=5/2
F(-2,1)
x
(-5,-5)
x=-5