Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2017

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$, calcule:

1. Calcular su dominio.
2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = -1$.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (x-1)^3 = 0 \Longrightarrow (1, 0)$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.
3.

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
signo	$-$	$+$

4. $f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ la función no tiene simetría.
5. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2} - x \right) = -3$$

$$y = x - 3$$

6. $f'(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)^2}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = -2, \;\; x = 1$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

Crece: $(-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$
Decrece: $[-2, 0)$
La función tiene un máximo en el punto $(-2, -6{,}75)$, en el punto donde $x = 1$ la función pasa de crecer a crecer, luego no es ni máximo ni mínimo, y en el punto $x = 0$ hay una asíntotata, luego tampoco puede ser ni máximo ni mínimo.

7. $f''(x) = \dfrac{6(x-1)}{x^4}$. Como el denominador es siempre positivo, bastará con estudiar el numerador

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	convexa	cóncava

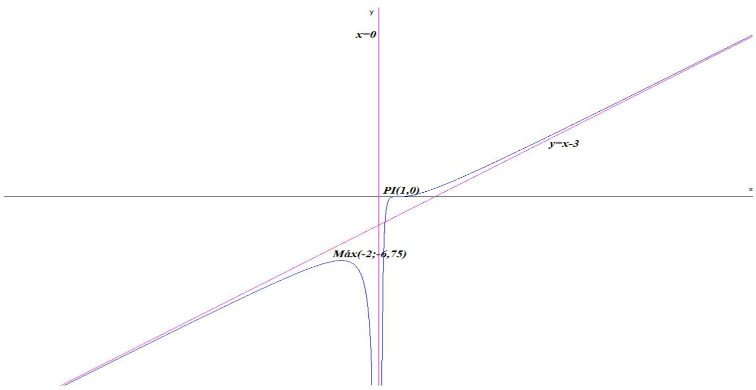
Convexa: $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$
Cóncava: $[1, +\infty)$

En el punto $(1,0)$ la gráfica pasa de ser convexa a ser cóncava y hay continuidad en ese punto, por lo que estamos ante un punto de inflexión.
Por el criterio de la tercera derivada sería

$$f'''(x) = 6(4-3x)x^5 \Longrightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$$

Luego en $x = 1$ hay un punto de inflexión.

8. Representación



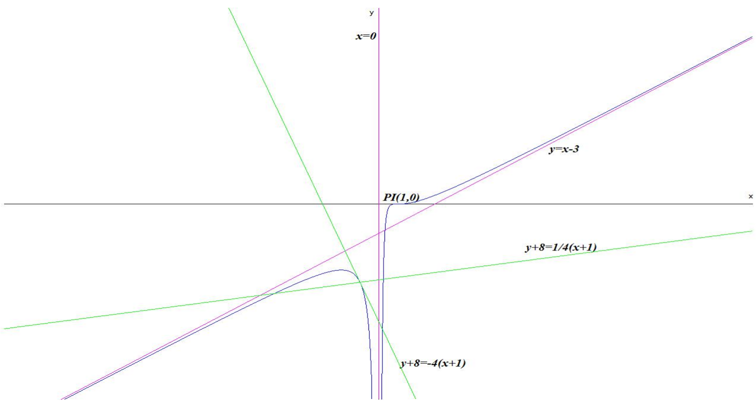
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = -1$:

Como $m = f'(-1) = -4$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y + 8 = -4(x+1)$$

$$\text{Recta Normal}: \; y + 8 = \frac{1}{4}(x+1)$$

Como $f(-1) = -8$ las rectas pasan por el punto $(-1,-8)$.



y
x=0
y=x-3
PI(1,0)
x
y+8=1/4(x+1)
y+8=-4(x+1)