Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)

Junio 2017

Problema 1 *(3 puntos)*Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 5}{x + 5}$$

se pide:

1. Calcular sus asíntotas
2. Estudiar su monotonía y extremos relativos.
3. Calcular la recta tangente a f en el punto de abcisa $x = 1$

Solución:

1. - **Verticales:** $x = -5$

$$\lim_{x \longrightarrow -5} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^-} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \left[\frac{25}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^+} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \left[\frac{25}{0^+}\right] = +\infty$$

   - **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \infty$$

   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 5}{x^2 + 5x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 5}{x + 5} - x\right) = -4$$

   Luego la asíntota oblicua es $y = x - 4$

2. $f'(x)=\dfrac{x^2+10x}{(x+5)^2}=0\Longrightarrow x=0$ y $x=-10$:

	$(-\infty,-10)$	$(-10,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-10)\cup(0,+\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-10,-5)\cup(-5,0)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-10,-19)$ y un mínimo en $(0,1)$.

3. $b=f(a)=f(1)=7/6$, $m=f'(a)=f'(1)=11/36$, luego la recta tangente a la función es: $y-7/6=11/36(x-1)$

Problema 2 *(3 puntos)*Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & 2y- & z= & 2\\ 2x- & y+ & 3z= & 2\\ x+ & 7y- & 6z= & 4\end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y+ & +z= & 5\\ 2x- & y+ & z= & 4\\ 3x+ & y- & 2z= & -2\end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & z= & 2\\ 2x- & y+ & 3z= & 2\\ x+ & 7y- & 6z= & 4\end{array}\right. \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=6/5-\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & +z= & 5\\ 2x- & y+ & z= & 4\\ 3x+ & y- & 2z= & -2\end{array}\right. \text{Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=1\\ z=3\end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)*Sea la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} 2ax^2-bx+3 & \text{si} & x<1\\ ax^2-2bx+1 & \text{si} & x\ge 1\end{array}\right.$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (2ax^2 - bx + 3) = 2a - b + 3 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (ax^2 - 2bx + 1) = a - 2b + 1 \end{array}\right. \Longrightarrow a + b = -2$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 4ax - b & \text{si} & x < 1 \\ 2ax - 2b & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(1^-) = 4a - b \\ f'(1^+) = 2a - 2b \end{array}\right. \Longrightarrow 2a + b = 0$$

3. $$\left\{\begin{array}{l} a + b = -2 \\ 2a + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -4 \end{array}\right.$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 4x^2 + 4x + 3 & \text{si} & x < 1 \\ \\ 2x^2 + 8x + 1 & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right.$$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 8x + 4 & \text{si} & x < 1 \\ 4x + 8 & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right.$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ que cumple $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 11$.

Si cogemos la primera rama $c < 1$:

$$f'(c) = 8c + 4 = 11 \Longrightarrow c = 7/8 \text{ si vale}$$

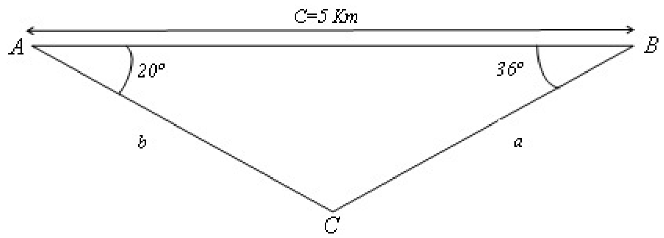
Si cogemos la segunda rama $c \geq 1$:

$$f'(c) = 4c + 8 = 11 \Longrightarrow c = 3/4 \text{ no vale}$$

El punto $c \in (0, 2)$ al que hace referencia el teorema es $c = 7/8$.

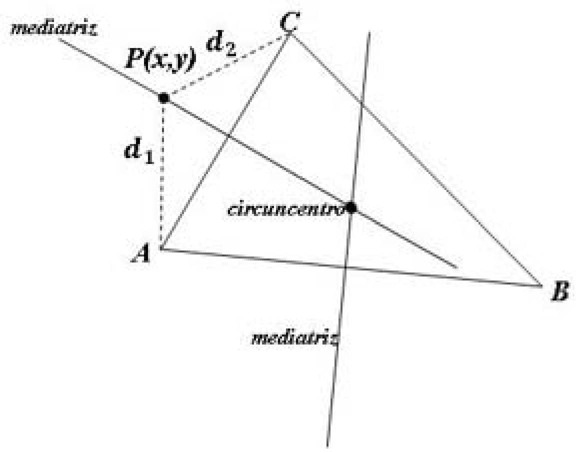
Problema 4 *(1 punto)*Alejandra y David son dos marinos que estudiaron el Bachillerato en el colegio Villaeuropa de Móstoles. Cada uno de ellos está en un barco distinto y están investigando el fondo marino. Ambos detectan con el sonar la presencia de un barco undido. Se encuentran separados rectilineamente por una distancia de 5 Km. y el barco undido está en esta recta. Alejandra lo detectaba con un ángulo de 20º y David con un ángulo de 36º.

Calcular las distacias que separan al barco undido de nuestros compañeros.
Solución:



$$\alpha = 180^{\circ} - 55^{\circ} = 124^{\circ}$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\frac{5}{\sin 124^{\circ}} = \frac{b}{\sin 36^{\circ}} \Longrightarrow b = 3,54\,\text{Km}$$
$$\frac{5}{\sin 124^{\circ}} = \frac{a}{\sin 20^{\circ}} \Longrightarrow y = 2,062\,\text{Km}$$

Problema 5 *(1 punto)*Si los puntos $A(-3,1)$, $B(4,-2)$ y $C(2,7)$ tres vértices consecutivos de un triángulo, se pide calcular su circuncentro.
Solución:
Calculamos dos de sus mediatrices:



- Mediatriz entre A y B:

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}\Longrightarrow 7x-3y-5=0$$

- Mediatriz entre A y C:

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-7)^2}\Longrightarrow 10x+12y-43=0$$

- Circuncentro:

$$\left\{\begin{array}{l}7x-3y-5=0\\10x+12y-43=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left(\frac{63}{38},\frac{251}{114}\right)$$