Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)

Junio 2017-Recuperación

Problema 1 *(2 puntos)*Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 3 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^2 - 2bx + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (2ax^2 - bx + 3) = 2a - b + 3 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (ax^2 - 2bx + 1) = a - 2b + 1 \end{array} \right. \Longrightarrow a + b = -2$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2ax - 2b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 4a - b \\ f'(1^+) = 2a - 2b \end{array} \right. \Longrightarrow 2a + b = 0$$

3. $$\left\{ \begin{array}{l} a + b = -2 \\ 2a + b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -4 \end{array} \right.$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 4x + 3 & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 2x^2 + 8x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 8x + 4 & \text{si} \quad x < 1 \\ 4x + 8 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El

Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0,2)$ que cumple $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 11$.

Si cogemos la primera rama $c < 1$:

$$f'(c) = 8c + 4 = 11 \Longrightarrow c = 7/8 \text{ si vale}$$

Si cogemos la segunda rama $c \geq 1$:

$$f'(c) = 4c + 8 = 11 \Longrightarrow c = 3/4 \text{ no vale}$$

El punto $c \in (0,2)$ al que hace referencia el teorema es $c = 7/8$.

Problema 2 *(4 puntos)*Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 5}{x + 5}$$

se pide:

1. Calcular sus asíntotas
2. Estudiar su monotonía y extremos relativos.
3. Calcular la recta tangente a f en el punto de abcisa $x = 1$

Solución:

1. - **Verticales:** $x = -5$

$$\lim_{x \longrightarrow -5} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^-} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \left[\frac{25}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^+} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \left[\frac{25}{0^+}\right] = +\infty$$

   - **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \infty$$

   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 5}{x^2 + 5x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 5}{x + 5} - x\right) = -4$$

   Luego la asíntota oblicua es $y = x - 4$

2. $f'(x) = \dfrac{x^2+10x}{(x+5)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -10$:

	$(-\infty, -10)$	$(-10, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

   La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -10) \cup (0, +\infty)$.

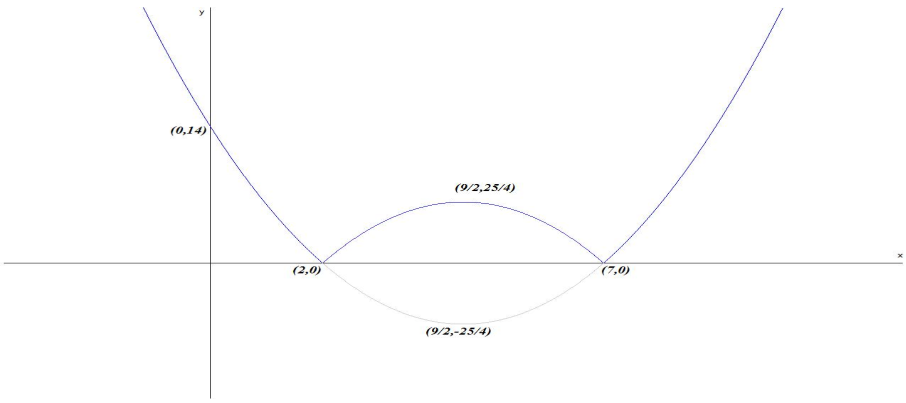
   La función es decreciente en el intervalo $(-10, -5) \cup (-5, 0)$.

   La función tiene un máximo en el punto $(-10, -19)$ y un mínimo en $(0, 1)$.

3. $b = f(a) = f(1) = 7/6$, $m = f'(a) = f'(1) = 11/36$, luego la recta tangente a la función es: $y - 7/6 = 11/36(x - 1)$

Problema 3 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 9x + 14|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - 9x + 14 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 9 = 0 \Longrightarrow x = 9/2$:



x	y
0	14
2	0
7	0
9/2	$-25/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(\frac{9}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{9}{2}, -\frac{25}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto:

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - 9x + 14 & \text{si} & x \le 2 \\ -(x^2 - 9x + 14) & \text{si} & 2 < x \le 7 \\ x^2 - 9x + 14 & \text{si} & 7 \le x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (x^2 - 9x + 14) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (-x^2 + 9x - 14) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Y f es continua en $x = 7$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^-} (-x^2 + 9x - 14) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^+} (x^2 - 9x + 14) = 0$$

$$f(7) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 9 & \text{si} & x \le 2 \\ -2x + 9 & \text{si} & 2 < x \le 7 \\ 2x - 9 & \text{si} & 7 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -5$ y $f'(2^+) = 5$, luego no es derivable en $x = 2$.
Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -5$ y $f'(7^+) = 5$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{2, 7\}$.

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} e^x - x + 3a & \text{si} & x < 0 \\ \\ \dfrac{x+8}{x+2} & \text{si} & x \ge 0 \end{array} \right.$$

1. Calcular a de forma que la función sea continua en $x = 0$ y la continuidad en R.

2. Para el valor de a obtenido en el apartado anterior estudiar la derivabilidad de la función en R.

Solución:

1. Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0}(e^x - x + 3a) = 1 + 3a \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x+8}{x+2} = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow 1{+}3a = 4 \Longrightarrow a = 1$$

   En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es siempre continua. Luego la función es continua en R.

2. Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} e^x - 1 & \text{si} & x < 0 \\ \\ \dfrac{-6}{(x+2)^2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

   $f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = -3 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

   En conclusión f es continua en R y derivable en $R - \{0\}$.