Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)

Junio 2017

Problema 1 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - bx + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^2 + 2bx - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (3ax^2 - bx + 2) = 3a - b + 2 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (ax^2 + 2bx - 1) = a + 2b - 1 \end{array} \right. \Longrightarrow 2a - 3b = -3$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2ax + 2b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(1^-) = 6a - b \\ f'(1^+) = 2a + 2b \end{cases} \Longrightarrow 4a - 3b = 0$$

3. $$\begin{cases} 2a - 3b = -3 \\ 4a - 3b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3/2 \\ b = 2 \end{cases}$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 9/2x^2 - 2x + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 3/2x^2 + 4x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 9x - 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3x + 4 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El

Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0,2)$ que cumple $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{11}{2}$.

Si cogemos la primera rama $c < 1$:

$$f'(c) = 9c - 2 = 11/2 \Longrightarrow c = 5/6 \text{ si vale}$$

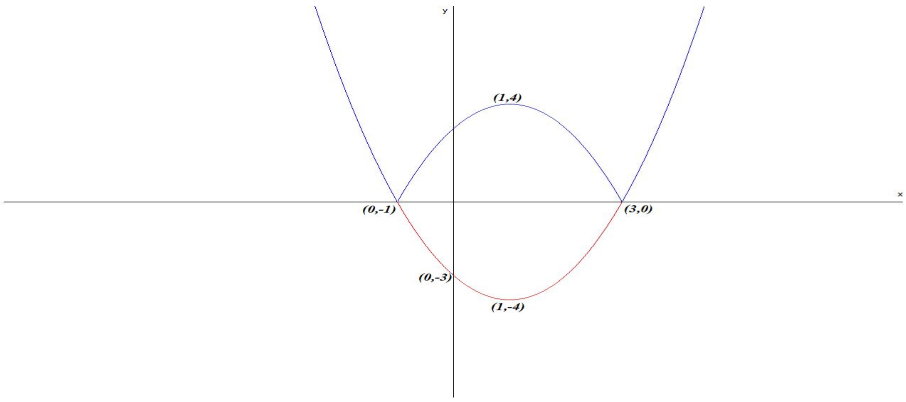
Si cogemos la segunda rama $c \geq 1$:

$$f'(c) = 3c + 4 = 11/2 \Longrightarrow c = 1/2 \text{ no vale}$$

El punto $c \in (0,2)$ al que hace referencia el teorema es $c = 7/12$.

Problema 2 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - 2x - 3 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$:



x	y
0	-3
-1	0
3	0
1	-4

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(1) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(1,-4)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(1,4)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - 2x - 3 & \text{si} & x \leq -1 \\ -(x^2 - 2x - 3) & \text{si} & -1 < x \leq 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si} & 3 \leq x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x=-1$:

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} (x^2-2x-3) = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} (-x^2+2x+3) = 0$$

$$f(-1) = 0$$

Y f es continua en $x=3$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^-} (-x^2+2x+3) = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^+} (x^2-2x-3) = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lcc} 2x-2 & \text{si} & x\le -1 \\ -2x+2 & \text{si} & -1<x\le 3 \\ 2x-2 & \text{si} & 3\le x \end{array}\right.$$

Derivabilidad en $x=-1$: $f'(-1^-) = -4$ y $f'(-1^+) = 4$, luego no es derivable en $x=-1$.
Derivabilidad en $x=3$: $f'(3^-) = -4$ y $f'(3^+) = 4$, luego no es derivable en $x=3$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R-\{-1,3\}$.

Problema 3 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = x^3+5ax^2-bx+2c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0,2)$ y tiene un extremo en $x=1$ y un punto de inflexión en $x=3$. Determinar si el extremo es un máximo o un mínimo.

Solución:

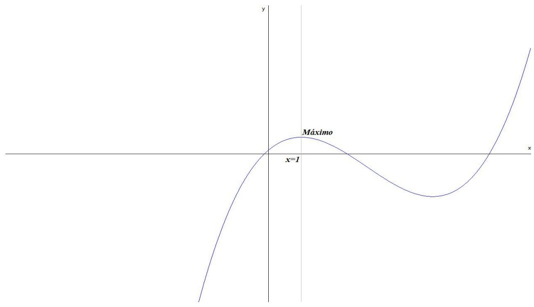
$$f(x) = x^3+5ax^2-bx+2c,\quad f'(x) = 3x^2+10ax-b,\quad f''(x) = 6x+10a$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0)=2 \Longrightarrow 2c=2 \Longrightarrow c=1 \\ f'(1)=0 \Longrightarrow 3+10a-b=0 \\ f''(3)=0 \Longrightarrow 18+10a=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-9/5 \\ b=-15 \\ c=1 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x)=x^3-9x^2+15x+2$$

$$f''(x) = 6x-18 \Longrightarrow f''(1) = -12 < 0 \Longrightarrow x=1 \text{ máximo}$$

Problema 4 Dada la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lcc} e^x-x+3a & \text{si} & x<0 \\ \\ \dfrac{x+8}{x+2} & \text{si} & x\ge 0 \end{array}\right.$$



1. Calcular a de forma que la función sea continua en $x = 0$ y la continuidad en R.
2. Para el valor de a obtenido en el apartado anterior estudiar la derivabilidad de la función en R.

Solución:

1. Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(e^x - x + 3a) = 1 + 3a \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x+8}{x+2} = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow 1{+}3a = 4 \Longrightarrow a = 1$$

En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es siempre continua. Luego la función es continua en R.

2. Derivabilidad en $x = 0$:

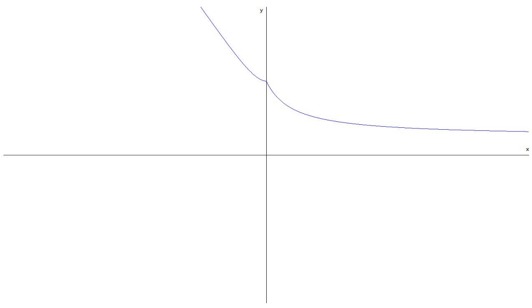
$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} e^x - 1 & \text{si} & x < 0 \\ \\ \dfrac{-6}{(x+2)^2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

$f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = -3 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

En conclusión f es continua en R y derivable en $R - \{0\}$.

Problema 5 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lcc} \frac{2ax-b}{2} & \text{si} & x < -1 \\ bx - 1 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{ax-b}{2} & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right.$$



Solución:

Continuidad en $x = -1$:

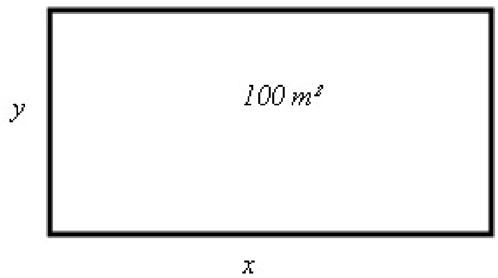
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{2ax - b}{2} = \dfrac{-2a - b}{2} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (bx - 1) = -b - 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \dfrac{-2a - b}{2} = -2b - 2 \Longrightarrow 2a - b = 2$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (bx - 1) = b - 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{ax - b}{2} = \dfrac{a - b}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow b - 1 = \dfrac{a - b}{2} \Longrightarrow a - 3b = -2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a - b = 2 \\ a - 3b = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 8/5 \\ b = 6/5 \end{array} \right.$$

Problema 6 Encontrar la menor longitud que deben medir la suma de los lados de de un rectángulo que encierran un área de 100 m^2.
Solución:



$$S = xy = 100 \Longrightarrow y = \frac{100}{x}$$

$$L(x, y) = 2x + 2y \Longrightarrow L(x) = 2x + \frac{200}{x} = \frac{2x^2 + 200}{x} \Longrightarrow L'(x) = \frac{2x^2 - 200}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 10$$

	$(-\infty,-10)$	$(-10,10)$	$(10,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego $x = 10\,m$ es un mínimo al que le corresponde un valor para el otro cateto de $y = \dfrac{100}{10} = 10\,m$