Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)

Junio 2017

Problema 1 Calcular a y b para que la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - 2ax + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (3ax^2 - 2bx + 1) = 3a - 2b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 - 2ax + 2) = b - 2a + 2$$

$$3a - 2b + 1 = b - 2a + 2 \Longrightarrow 5a - 3b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - 2a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 6a - 2b; \;\; f'(1^+) = 2b - 2a \Longrightarrow 6a - 2b = 2b - 2a \Longrightarrow 2a - b = 0$$

$$\begin{cases} 5a - 3b = 1 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

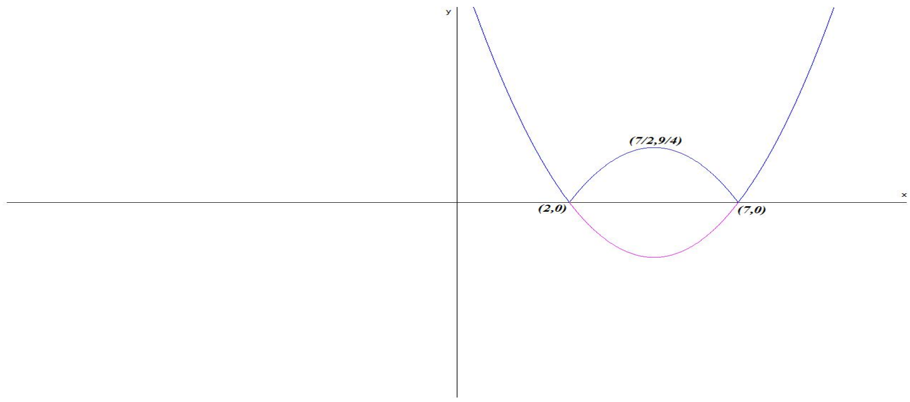
$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 4x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -2x^2 + 2x + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -6x + 4 & \text{si} \quad x < 1 \\ -4x + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c \in [0, 2]/f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-2 - 1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Si $c < 1 :\; f'(c) = -6c + 4 = -\frac{3}{2} \Longrightarrow c = \frac{11}{12}$ solución válida. Si $c \geq 1 :$ $f'(c) = -4c + 2 = -\frac{3}{2} \Longrightarrow c = \frac{7}{8}$ solución no válida.

Problema 2 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 7x + 10|$ y representarla gráficamente.



Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - 7x + 10 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 7 = 0 \Longrightarrow x = 7/2$:

x	y
0	10
2	0
5	0
$7/2$	$-9/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(\frac{7}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 - 7x + 10 & \text{si} & x \le 2 \\ -(x^2 - 7x + 10) & \text{si} & 2 < x \le 5 \\ x^2 - 7x + 10 & \text{si} & 5 \le x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (x^2 - 7x + 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (-x^2 + 7x - 10) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} (-x^2 + 7x - 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} (x^2 - 7x + 10) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-7 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x+7 & \text{si} \quad 1 < x \le 7 \\ 2x-7 & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -3$ y $f'(2^+) = 3$, luego no es derivable en $x = 2$.
Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -3$ y $f'(5^+) = 3$, luego no es derivable en $x = 5$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{2, 5\}$.

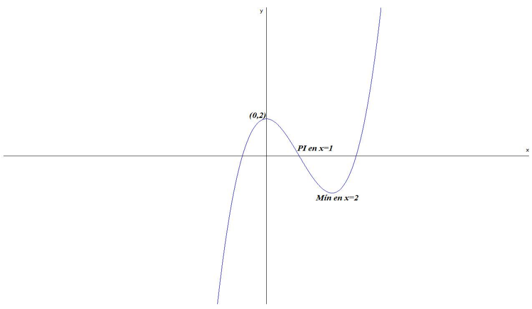
Problema 3 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = x^3 + 3ax^2 - 2bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 1$. Determinar si el extremo es un máximo o un mínimo.

Solución:

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 - 2bx + c, \quad f'(x) = 3x^2 + 6ax - 2b, \quad f''(x) = 6x + 6a$$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12 + 12a - 2b = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 6 + 6a = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$f''(x) = 6x - 6 \Longrightarrow f''(2) = 12 > 0 \Longrightarrow x = 2 \text{ mínimo}$$



Problema 4 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x - x + a & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x+3}{x+1} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

1. Calcular a de forma que la función sea continua en $x = 0$ y la continuidad en R.

2. Para el valor de a obtenido en el apartado anterior estudiar la derivabilidad de la función en R.

Solución:

1. Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0}(2e^x - x + a) = 2 + a \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x+3}{x+1} = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow a = 1$$

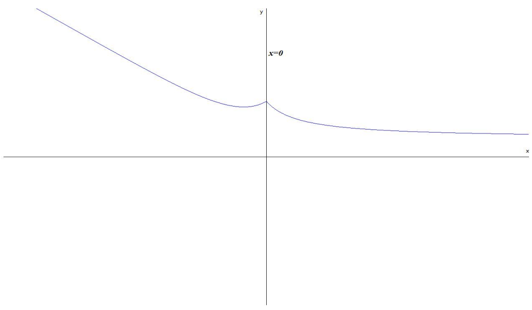
   En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es siempre continua. Luego la función es continua en R.

2. Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2e^x - 1 & \text{si} & x < 0 \\ \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$$

   $f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -2 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

   En conclusión f es continua en R y derivable en $R - \{0\}$.



Problema 5 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcc} \frac{ax-2b}{3} & \text{si} & x < -1 \\ bx - 2 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{2ax-b}{2} & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

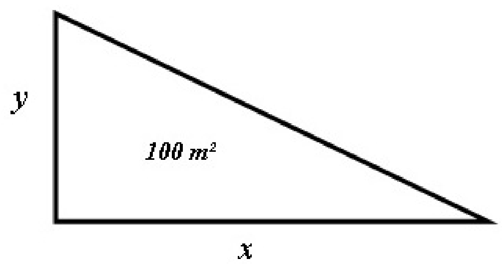
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{ax-2b}{3} = \dfrac{-a-2b}{3} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} (bx-2) = -b-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \dfrac{-a-2b}{3} = -b-2 \Longrightarrow a-b = 6$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} (bx-2) = b-2 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{2ax-b}{2} = \dfrac{2a-b}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow b-2 = \dfrac{2a-b}{2} \Longrightarrow 2a-3b = -4$$

$$\left\{\begin{array}{l} a-b=6 \\ 2a-3b=-4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=22 \\ b=16 \end{array}\right.$$

Problema 6 Encontrar la menor longitud que deben medir la suma de los catetos de un triángulo rectángulo que encierran un área de 100 m^2.
Solución:



$$S = \frac{xy}{2} = 100 \Longrightarrow y = \frac{200}{x}$$

$$L(x,y) = x+y \Longrightarrow L(x) = x+\frac{200}{x} = \frac{x^2+200}{x} \Longrightarrow L'(x) = \frac{x^2-200}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 10\sqrt{2}$$

	$(-\infty, -10\sqrt{2})$	$(-10\sqrt{2}, 10\sqrt{2})$	$(10\sqrt{2}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego $x = 10\sqrt{2}\, m$ es un mínimo al que le corresponde un valor para el otro cateto de $y = \dfrac{200}{10\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}\, m$