Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2017

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{-3x+12}{(x-1)^2}$, calcule:

1. Calcular su dominio.
2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 0$.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{1\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -3x + 12 = 0 \Longrightarrow (4, 0)$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 12 \Longrightarrow (0, 12)$.
3.

	$(-\infty, 4)$	$(4, +\infty)$
signo	$+$	$-$

4. $f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ la función no tiene simetría.
5. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{-3x+12}{(x-1)^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{-3x+12}{(x-1)^2} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{-3x+12}{(x-1)^2} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-3x+12}{(x-1)^2} = 0$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

6. $f'(x) = \dfrac{3(x-7)}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 7$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 7)$	$(7, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

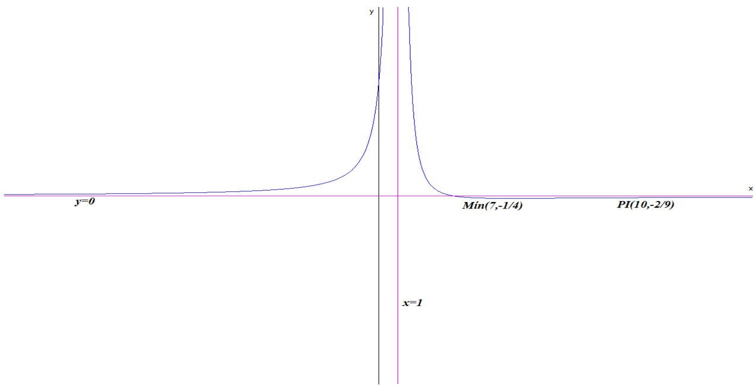
Crece: $(-\infty, 1] \cup (7, +\infty)$
Decrece: $(1, 7)$
La función tiene un mínimo en el punto $(7, -1/4)$, en el punto donde $x = 1$ la función pasa de crecer a decrecer, pero es una asíntota vertical, luego tampoco no puede ser ni máximo ni mínimo.

7. $f''(x) = \dfrac{-6(x-10)}{(x-1)^4} = 0 \Longrightarrow x = 10$. Como el denominador es siempre positivo, bastará con estudiar el numerador

	$(-\infty, 10)$	$(10, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	cóncava	convexa

Cóncava: $(-\infty, 1) \cup (1, 10)$
Convexa: $(10, +\infty)$
En el punto $(10, -2/9)$ la gráfica pasa de ser cóncava a ser convexa y hay continuidad en ese punto, por lo que estamos ante un punto de inflexión.

8. Representación



9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 0$:

   Como $m = f'(0) = 21$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y - 12 = 21x$$

$$\text{Recta Normal}: \; y - 12 = -\frac{1}{21}x$$

   Como $f(0) = 12$ las rectas pasan por el punto $(0, 12)$.