Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2015

Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-1,0)$, $B(5,1)$ y $C(3,0)$. Obtener su centro, su radio.

Solución:

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

$$\left\{\begin{array}{c} -m+p=-1 \\ 5m+n+p=-26 \\ 3m+p=-9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=-2 \\ n=-13 \\ p=-3 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2-2x-13y-3=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m=-2a=-2 \Longrightarrow a=1 \\ n=-2b=-13 \Longrightarrow b=13/2 \\ p=-3=a^2+b^2-r^2 \Longrightarrow r=\frac{\sqrt{185}}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro}=\left(1,\frac{13}{2}\right),\ \ r=\frac{\sqrt{185}}{2}$$

Problema 2 Sea $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ la ecuación de una elipse horizontal. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$a^2=36 \Longrightarrow a=6,\ \ b^2=9 \Longrightarrow b=3$$

$$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c=3\sqrt{3}\quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Eje Mayor$=2a=12$
Eje Menor$=2b=6$
Distancia Focal$=2c=6\sqrt{3}$
Excentricidad$=e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Vértices: $A(6,0)$, $A'(-6,0)$, $B(0,3)$, $B(0,-3)$
Focos: $F(\sqrt{27},0)$, $F'(-\sqrt{27},0)$
Ecuación general: $x^2+4y^2=36$

Problema 3 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 4 cm y tiene una excentricidad $e=\dfrac{1}{5}$. Calcular los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{5} \Longrightarrow a=5c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 25c^2 = 4 + c^2 \Longrightarrow c = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$a = 5c = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Eje Mayor= $2a = \frac{5\sqrt{6}}{3}$
Eje Menor= $2b = 4$
Distancia Focal= $2c = \frac{\sqrt{6}}{3}$
Excentricidad= $e = \dfrac{1}{5}$
Vértices: $A\left(\dfrac{5\sqrt{6}}{6}, 0\right)$, $A'\left(-\dfrac{5\sqrt{6}}{6}, 0\right)$, $B(0,2)$, $B'(0,-2)$
Focos: $F\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}, 0\right)$, $F'\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}, 0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{25/6} + \frac{y^2}{4} = 1 \Longrightarrow \frac{6x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Ecuación general: $24x^2 + 25y^2 = 100$

Problema 4 Encontrar los puntos de la recta

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2}$$

que se encuentran a una distancia 5 del punto $P(-1,3)$.
Solución:
Construimos la circunferencia de centro P y radio 5:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Cortamos r con esta circunferencia; para ello ponemos r en paramétricas: $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{array} \right.$ y sustituimos en la circunferencia:

$$(3+3\lambda)^2 + (2\lambda-2)^2 = 25 \Longrightarrow 13\lambda^2 + 10\lambda - 12 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1,42, \ \ \lambda_2 = 0,65$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -1,42 \Longrightarrow P_1(-2,26; 1,84) \\ \lambda_2 = 0,65 \Longrightarrow P_1(3,95; 2,3) \end{array} \right.$$

Problema 5 En una isla del Océano Pacífico se encuentran, pasando unas vacaciones, unos amigos que habían estudiado el bachillerato en el colegio Villaeuropa de Móstoles, se habían citado antigüos compañeros de clase, para recordar viejos tiempos. La formación de un tornado amenaza con amargarlos la cita. El servicio metereológico les comunica que éste girará alrededor

de la urbanización en la que se encuentran y siempre estará a la misma distancia con ellos que con una formación rectilínea de corales que observan en el mar. Automáticamente sacaron un plano para situar la urbanización en el punto $F(-1,2)$ y la línea de corales que seguiría la ecuación de la recta $x-2y=0$.
Uno de los alumnos que conoce bastante la zona les comenta que este fenómeno suele ser corriente en esta época del año y suele ser peligroso estar a menos de 200 metros en estos casos. (escala 1 : 100)

Se pide:

a) Identifica de que curva se trata.

b) Calcular la ecuación de esta curva.

c) Calcular las tangentes a la curva en los puntos en los que corta la recta $x=1$

d) ¿Estarían en peligro?

Solución:

a) Se trata de una parábola por definición.

b) Sea $P(x,y)$ un punto de esa parábola, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{AP}| = d(P,r)$$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = \frac{|x-2y|}{\sqrt{5}} \Longrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2 = \frac{(x-2y)^2}{5}$$

$$\Longrightarrow 4x^2+y^2+4xy+10x-20y+25=0$$

c) En $x=1 \Longrightarrow y^2-16y+39=0 \Longrightarrow y_1=3 \;\; y_2=13$:

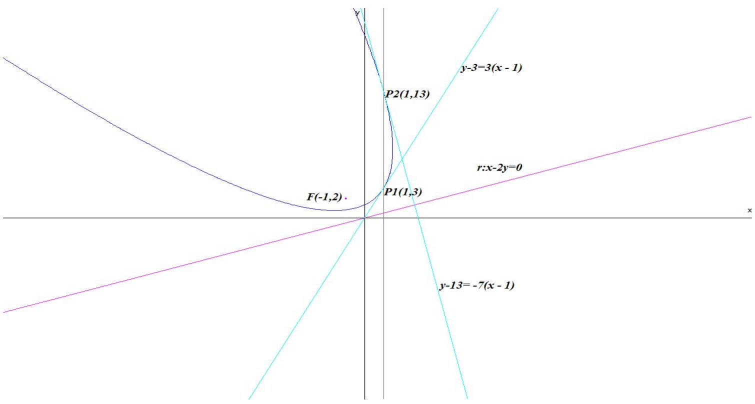
$$P_1(1,3) \quad P_2(1,13)$$

$$8xdx+2ydy+4ydx+4xdy+10dx-20dy=0 \Longrightarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8x+4y+10}{4x+2y-20} = -\frac{4x+2y+5}{2x+y-10}$$

En $P_1(1,3) \Longrightarrow m=3 \Longrightarrow y-3=3(x-1)$

$P_2(1,13) \Longrightarrow m=-7 \Longrightarrow y-13=-7(x-1)$

d) Claramente estarían en peligro.


y-3=3(x - 1)
P2(1,13)
r:x-2y=0
F(-1,2)
P1(1,3)
y-13= -7(x - 1)