Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2014

Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(0,1)$, $B(2,1)$ y $C(3,0)$. Obtener su centro y su radio.

Solución:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

$$\left\{\begin{array}{c} n+p=-1 \\ 2m+n+p=-5 \\ 3m+p=-9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=-2 \\ n=2 \\ p=-3 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m=-2a=-2 \Longrightarrow a=1 \\ n=-2b=2 \Longrightarrow b=-1 \\ p=-3=a^2+b^2-r^2 \Longrightarrow r=\sqrt{5} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro} = (1,-1)\,, \quad r=\sqrt{5}$$

Problema 2 Sea $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ la ecuación de una elipse horizontal. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5, \quad b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c = 3 \quad e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$

Eje Mayor$= 2a = 10$
Eje Menor$= 2b = 8$
Distancia Focal$= 2c = 6$
Excentricidad$= e = \dfrac{3}{5}$
Vértices: $A(5,0)$, $A'(-5,0)$, $B'(0,4)$, $B(0,-4)$
Focos: $F(3,0)$, $F'(-3,0)$
Ecuación general: $16x^2 + 25y^2 = 400$

Problema 3 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 4 cm y tiene una excentricidad $e = \dfrac{1}{4}$. Calcular los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \Longrightarrow a = 4c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 16c^2 = 4 + c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{\frac{4}{15}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

$$a = 4c = \frac{8}{\sqrt{15}}$$

Eje Mayor$= 2a = \frac{16}{\sqrt{15}}$
Eje Menor$= 2b = 4$
Distancia Focal$= 2c = \frac{4}{\sqrt{15}}$
Excentricidad$= e = \dfrac{1}{4}$
Vértices: $A\left(\dfrac{8}{\sqrt{15}}, 0\right)$, $A'\left(-\dfrac{8}{\sqrt{15}}, 0\right)$, $B(0,2)$, $B'(0,-2)$
Focos: $F\left(\dfrac{2}{\sqrt{15}}, 0\right)$, $F'\left(-\dfrac{2}{\sqrt{15}}, 0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{64/15} + \frac{y^2}{4} = 1 \Longrightarrow \frac{15x^2}{64} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Ecuación general: $15x^2 + 16y^2 = 64$

Problema 4 Dos ingenieros agrónomos, que habían estudiado el bachillerato en el colegio Villaeuropa de Móstoles, se habían citado, con sus antigüos compañeros de clase, en el chalet de una urbanización muy próxima al río Alberche. Cuando estaban reunidos recuerdan al pesado del profe de mates y sus problemas de geometría, por lo que estos dos ingenieros hacen la siguiente observación: Resulta que el río que rodea la urbanización traza una curva y se puede observar que los puntos de esta curva equidistan de la casa en la que estamos y de una carretera que discurre en línea recta. Automáticamente sacaron un plano para situar al edificio en el punto $F(1, -1)$ y la carretera que seguiría la ecuación de la recta $x - y = 0$.
Uno de los alumnos que conoce bastante la zona les comenta que este río suele tener unas crecidas muy fuertes en esta época del año y suele desbordarse siendo peligroso estar a menos de 500 metros en estos casos. (escala $1 : 100$)

Se pide:

a) Identifica de que curva se trata.

b) Calcular la ecuación de esta curva.

c) Calcular las tangentes a la curva en los puntos en los que corta la recta $x = 1$

d) ¿En caso de crecidas del río estarían en peligro?

Solución:

a) Se trata de una parábola por definición.

b) Sea $P(x,y)$ un punto de esa parábola, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{AP}| = d(P,r)$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \Longrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2 = \frac{(x-y)^2}{2}$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2+2xy-4x+4y+4=0$$

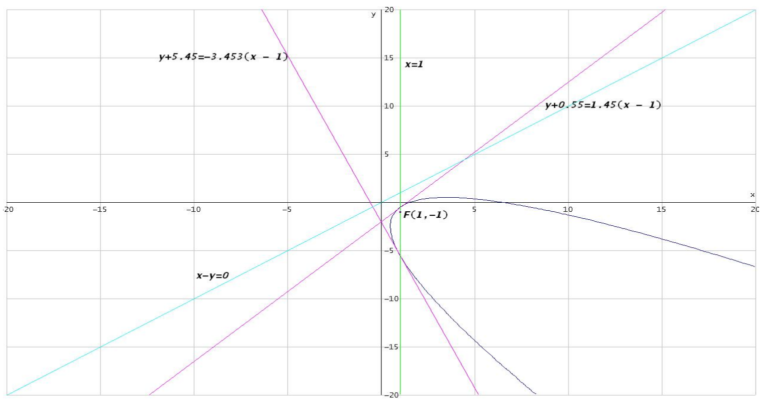
c) En $x=1 \Longrightarrow y^2+6y+1=0 \Longrightarrow y_1=-5,83 \;\; y_2=-0,17$:

$$P_1(1;-5,83) \quad P_2(1;-0,17)$$

$$2xdx+2ydy+2ydx+2xdy-4dx+4dy=0 \Longrightarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+2y-4}{2x+2y+4} = -\frac{x+y-2}{x+y+2}$$

En $P_1(1;-5,83) \Longrightarrow m=-2,41 \Longrightarrow y+5,83=-2,41(x-1)$

$P_2(1;-0,17) \Longrightarrow m=0,41 \Longrightarrow y+0,17=0,41(x-1)$



d) Claramente estarían en peligro.