Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

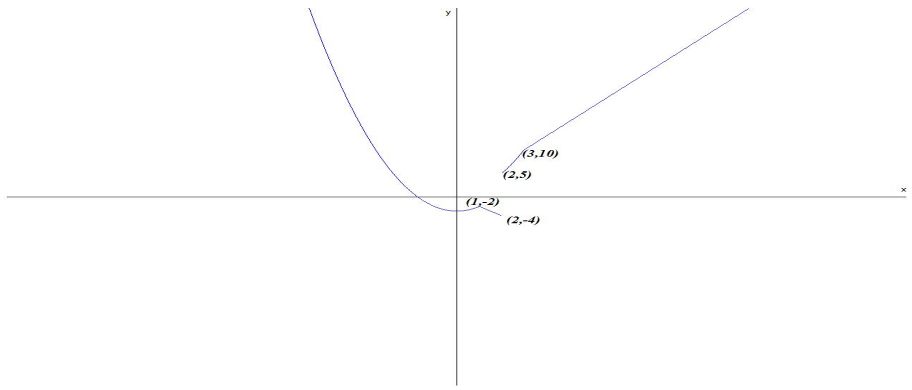
Junio 2014

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ x^2+1 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \\ 3x+1 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = 1$, $x = 2$ y en $x = 3$. Representarla gráficamente

Solución:



En $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto), y en $x = 3$ es continua .

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2-3bx+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx^2+ax+2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (2ax^2-3bx+1) = 2a-3b+1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (2bx^2+ax+2) = 2b+a+2$$

$$2a - 3b + 1 = 2b + a + 2 \Longrightarrow a - 5b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - 3b & \text{si} \quad x < 1 \\ 4bx + a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - 3b; \;\; f'(1^+) = 4b + a \Longrightarrow 4a - 3b = 4b + a \Longrightarrow 3a - 7b = 0$$

$$\begin{cases} a - 5b = 1 \\ 3a - 7b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -7/8 \\ b = -3/8 \end{cases}$$

Problema 3 Dada la función $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x-1}$, determina

a) Calcula sus asíntotas

b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: en $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{(x-3)^2}{x-1} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{(x-3)^2}{x-1} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x-1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x - 5$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{(x-3)^2}{x-1} - x \right) = -5$$

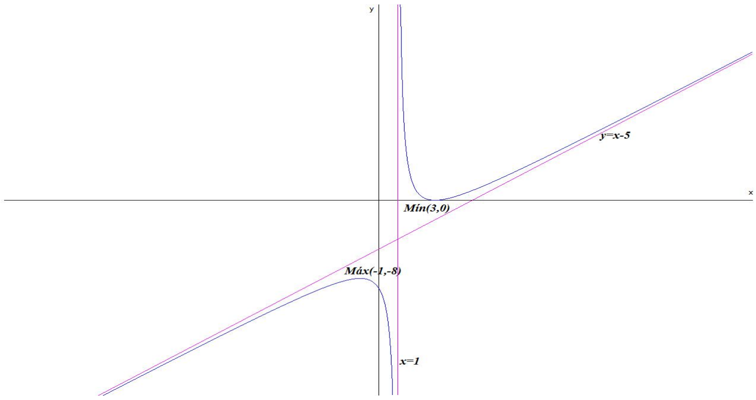
b) Monotonía y extremos:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x+1}, \quad f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$ y decrece en el intervalo $(-1,1)\cup(1,3)$

La función tiene un máximo en el punto $(-1,-8)$ y un mínimo en el punto $(3,0)$.



Problema 4 Estudiar la continuidad de la función $f(x)=|x^2-11x+28|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x)=x^2-11x+28\Longrightarrow g'(x)=2x-11=0\Longrightarrow x=11/2$:

x	y
0	28
4	0
7	0
11/2	$-9/4$

$g''(x)=2\Longrightarrow g''\left(\frac{11}{2}\right)>0\Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{11}{2},-\frac{9}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{11}{2},-\frac{9}{4}\right)$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{rcl} x^2-11x+28 & \text{si} & x\le 4\\ -(x^2-11x+28) & \text{si} & 4<x\le 7\\ x^2-11x+28 & \text{si} & 7\le x \end{array}\right.$$

Continuidad en $x=4$:

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 4^-}(x^2-11x+28)=0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 4^+} (-x^2 + 11x - 28) = 0$$

$$f(4) = 0$$

Y f es continua en $x = 7$

$$\lim_{x\longrightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 7^-} (-x^2 + 11x - 28) = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 7^+} (x^2 - 11x + 28) = 0$$

$$f(7) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 11 & \text{si} & x \le 4 \\ -2x + 11 & \text{si} & 4 < x \le 7 \\ 2x - 11 & \text{si} & 7 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = 4$: $f'(4^-) = -3$ y $f'(4^+) = 3$, luego no es derivable en $x = 3$.
Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -3$ y $f'(7^+) = 3$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{4, 7\}$.

Problema 5 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = ax^3 - 2bx^2 + 3cx + d$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 1)$, tiene un extremo en el punto $(2, 3)$ y un punto de inflexión en x=3. Decidir de que tipo de extremo se trata.

Solución:

$$f'(x) = 3ax^2 - 4bx + 3c, \quad f''(x) = 6ax - 4b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow d = 1 \\ f(2) = 3 \Longrightarrow 8a - 8b + 6c + d = 3 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a - 8b + 3c = 0 \\ f''(3) = 0 \Longrightarrow 18a - 4b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1/10 \\ b = 9/20 \\ c = 4/5 \\ d = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{9}{10}x^2 + \frac{12}{5}x + 1$$

$$f''(2) = \frac{6}{5} - \frac{9}{5} < 0 \Longrightarrow (2, 3) \text{ es un máximo}$$