

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CN)

Junio 2013

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{5x^3}{x^2 - 4}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Estudiar su curvatura y sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 1$.
- j) Calcular el área encerrada por la gráfica de la función f el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 5x^3 = 0 \implies (0, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.

c)

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
signo	—	+	—	+

d) $f(-x) = -f(x) \implies$ IMPAR.

e) Asíntotas:

■ **Verticales:** $x = 2$ ya que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{40}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{40}{0^+} \right] = +\infty$$

$x = -2$ ya que $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^3}{x^2 - 4} = \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{5x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{-40}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{5x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{-40}{0^-} \right] = +\infty$$

■ **Horizontales:** No hay ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{x^2 - 4} = \infty$

■ **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{x^3 - 4x} = 5$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3}{x^2 - 4} - 5x \right) = 0$$

$y = x$

f) $f'(x) = \frac{5x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} \neq 0 \implies x = -2\sqrt{3}, x = 2\sqrt{3}, x = 0$, en $x = 0$ no hay extremo.

	$(-\infty, -2\sqrt{3})$	$(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

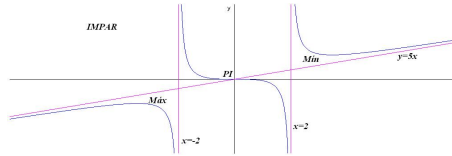
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$ y decreciente en $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (0, 2\sqrt{3})$. Presenta un máximo en el punto $(-2\sqrt{3}, -15\sqrt{3}) = (-3, 46; -25, 98)$, y un mínimo en el $(-2\sqrt{3}, -15\sqrt{3}) = (3, 46; 25, 98)$

g) $f''(x) = \frac{40x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3} = 0 \implies x = 0$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa	cóncava

La función f es convexa en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y cóncava en el intervalo $(-2, 0) \cup (2, \infty)$ y tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

h) Representación:



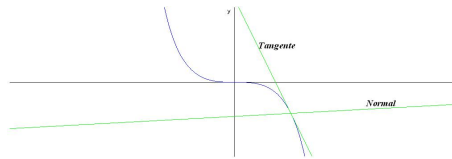
i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$:

Como $f(1) = -5/3$ las rectas pasan por el punto $(1, -5/3)$.

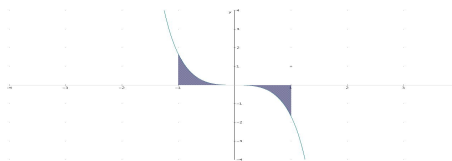
Como $m = f'(1) = -55/9$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y + \frac{5}{3} = -\frac{55}{9}(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal : } y + \frac{5}{3} = \frac{9}{55}(x - 1)$$



j) Área:



$$F(x) = \int \frac{5x^3}{x^2 - 4} dx = \frac{5x^2}{2} + 10 \ln |x - 2| + 10 \ln |x + 2|$$

$$S_1 = \int_{-1}^0 5x^3 x^2 - 4 dx = F(0) - F(-1) = -\frac{5}{2} - 10 \ln \left(\frac{3}{4} \right) = 0,377$$

$$S_2 = \int_0^1 5x^3 x^2 - 4 dx = F(1) - F(0) = \frac{5}{2} + 10 \ln \left(\frac{3}{4} \right) = -0,377$$

$$S = |S_1| + |S_2| = -5 - 20 \ln \left(\frac{3}{4} \right) = 0,754 u^2$$