

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CN)

Junio 2013

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 21}{x - 2}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Estudiar su curvatura y sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 1$.
- j) Calcular el área encerrada por la gráfica de la función f el eje de abscisas y las rectas $x = 6$ y $x = 8$.

Solución:

a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - 4x - 21 = 0 \implies (-3, 0), (7, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 21/2 \implies (0, 21/2)$.

c)

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 2)$	$(2, 7)$	$(7, +\infty)$
signo	$-$	$+$	$-$	$+$

d) $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ No hay simetría.

e) Asíntotas:

■ **Verticales:** $x = 2$ ya que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x - 21}{x - 2} = \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4x - 21}{x - 2} = \left[\frac{-25}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4x - 21}{x - 2} = \left[\frac{-25}{0^+} \right] = -\infty$$

■ **Horizontales:** No hay ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x - 21}{x - 2} = \infty$

■ **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4x - 21}{x - 2} - x \right) = -2$$

$$y = x - 2$$

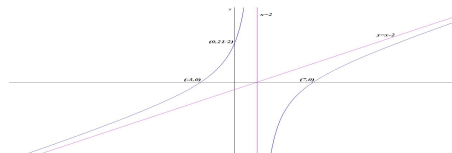
f) $f'(x) = -\frac{x^2 - 4x + 29}{(x - 2)^2} \neq 0 \implies$ No hay extremos y la función es creciente en $R - \{2\}$.

g) $f''(x) = \frac{-50}{(x - 2)^3} \neq 0 \implies$ No hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava

La función f es convexa en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava en el intervalo $(2, \infty)$.

h) Representación:



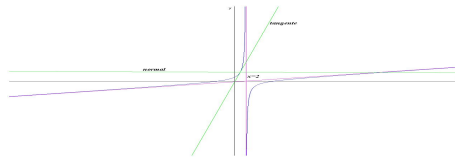
- i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$:

Como $f(1) = 24$ las rectas pasan por el punto $(1, 24)$.

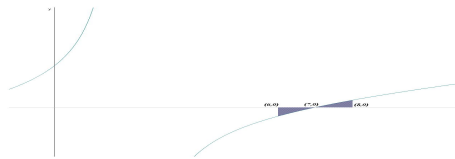
Como $m = f'(1) = 26$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y - 24 = 26(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal : } y - 24 = -\frac{1}{26}(x - 1)$$



- j) Área:



$$F(x) = \int \frac{x^2 - 4x - 21}{x - 2} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - 25 \ln |x - 2|$$

$$S_1 = \int_6^7 \frac{x^2 - 4x - 21}{x - 2} dx = F(7) - F(6) = \frac{9}{2} - 25 \ln \left(\frac{5}{4} \right) = -1,08$$

$$S_2 = \int_7^8 \frac{x^2 - 4x - 21}{x - 2} dx = F(8) - F(7) = \frac{11}{2} + 25 \ln \left(\frac{5}{6} \right) = 0,94$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 + 25 \ln \left(\frac{25}{24} \right) = 2,02 \text{ u}^2$$