

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CN)

Mayo 2013

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Estudiar su curvatura y sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 2$.
- Calcular el área encerrada por la gráfica de la función f el eje de ordenadas y la recta $x = 6$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$
- Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - 3x - 10 = 0 \implies (-2, 0), (5, 0)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -10/3 \implies (0, -3/4)$.
-

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 5)$	$(5, +\infty)$
signo	$-$	$+$	$-$	$+$

d) $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ No hay simetría.

e) Asíntotas:

■ **Verticales:** $x = -3$ ya que $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3} = \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3} = \left[\frac{8}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3} = \left[\frac{8}{0^+} \right] = +\infty$$

■ **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3} = \infty$$

■ **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 3x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3} - x \right) = -6$$

$y = x$

f) $f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x + 3)^2} = 0 \implies x = -0,17, \quad x = -5,83$

	$(-\infty; -5,83)$	$(-5,83; -0,17)$	$(-0,17; +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en: $(-\infty; -5,83) \cup (-0,17; +\infty)$

La función es decreciente en: $(-5,83; -3) \cup (-3; -0,17)$

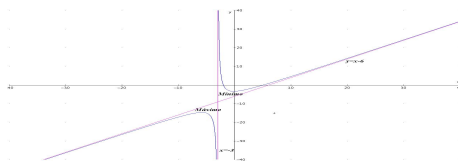
La función tiene un máximo en: $(-5,83; -14,67)$

La función tiene un mínimo en: $(-0,17; -3,43)$

g) $f''(x) = \frac{16}{(x + 3)^3} \neq 0 \implies$ no hay puntos de Inflexión. La función f es convexa en $(-\infty, -3)$ y cóncava en $(-3, +\infty)$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, +\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava

h) Representación:



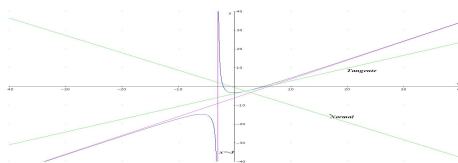
- i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$:

Como $f(2) = -12/5$ las rectas pasan por el punto $(2, -12/5)$.

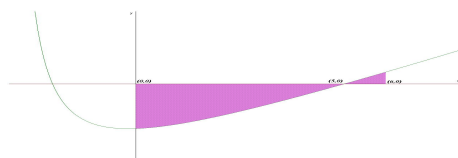
Como $m = f'(2) = 17/25$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y + \frac{12}{5} = \frac{17}{25}(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal : } y + \frac{12}{5} = -\frac{25}{17}(x - 2)$$



- j) Área:



$$F(x) = \int \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3} dx = \frac{x^2}{2} - 6x + 8 \ln |x + 3|$$

$$S_1 = \int_0^5 \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 4} dx = F(5) - F(0) = -\frac{35}{2} - 8 \ln \left(\frac{3}{8} \right) = -9,653$$

$$S_2 = \int_5^6 \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 4} dx = F(6) - F(5) = -\frac{1}{2} + 8 \ln \left(\frac{9}{8} \right) = 0,442$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 17 + 24 \ln \left(\frac{3}{4} \right) = 10,095 \text{ u}^2$$