Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)

Junio 2012

Problema 1 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x \le -1 \\ -2x & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ x^2-3 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

se pide:

1. Estudia su continuidad en los puntos de abcisa $x = -1$, $x = 1$ y $x = 2$.
2. Represéntala gráficamente de forma aproximada.

Solución:

1. Continuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} (x^2+1) = 2$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} (-2x) = 2$$

$$f(-1) = 2$$

En $x = -1$ la función es continua.

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (-2x) = -2$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (x^2-3) = -2$$

$$f(1) = \text{no existe}$$

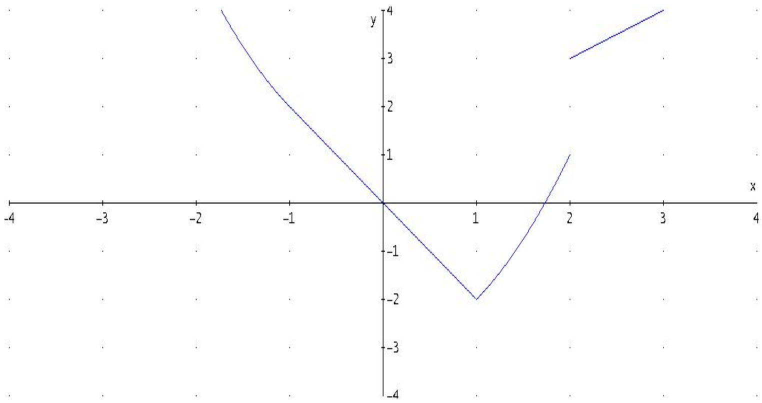
En $x = 1$ hay una discontinuidad evitable (agujero).
Continuidad en $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (x^2-3) = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (x+1) = 3$$

En $x = 2$ hay una discontinuidad no evitable (salto).

2. Gráficamente:



Problema 2 Encontrar el valor de los parámetros a y b de forma que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ ax^2 - 3bx + 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar el punto al que hace referencia dicho teorema.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (ax^2 - 3bx + 2) = a - 3b + 2$$

$$2a - b + 1 = a - 3b + 2 \Longrightarrow a + 2b - 1 = 0$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2ax - 3b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 4a - b \\ f'(1^+) = 2a - 3b \end{cases} \Longrightarrow 4a - b = 2a - 3b \Longrightarrow a + b = 0$$

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ que cumple $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = -\dfrac{9}{2}$.

Si cogemos la primera rama $c < 1$:

$$f'(c) = -4c - 1 = -9/2 \Longrightarrow c = 7/8 \text{ si vale}$$

Si cogemos la segunda rama $c \geq 1$:

$$f'(c) = -2c - 3 = -9/2 \Longrightarrow c = 3/4 \text{ no vale}$$

El punto $c \in (0, 2)$ al que hace referencia el teorema es $c = 7/8$.

Problema 3 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 4)$ y tiene un extremo en el punto $(1, 5)$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 4 \Longrightarrow c = 4 \\ f(1) = 5 \Longrightarrow a + b + c = 5 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{array}\right.$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 4$$

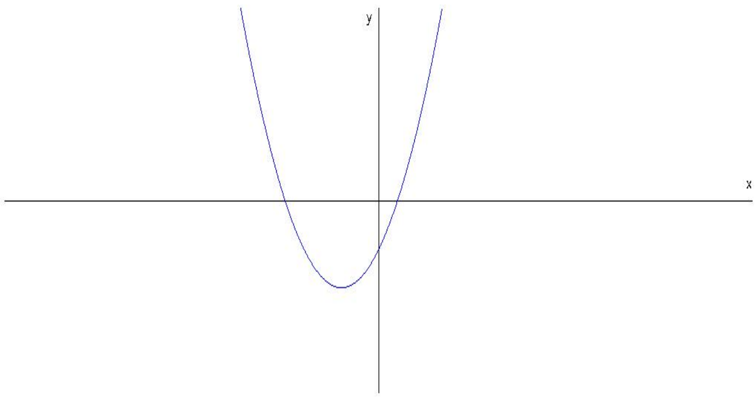
Problema 4 Analizar gráficamente la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + 4x - 5|$

Solución:

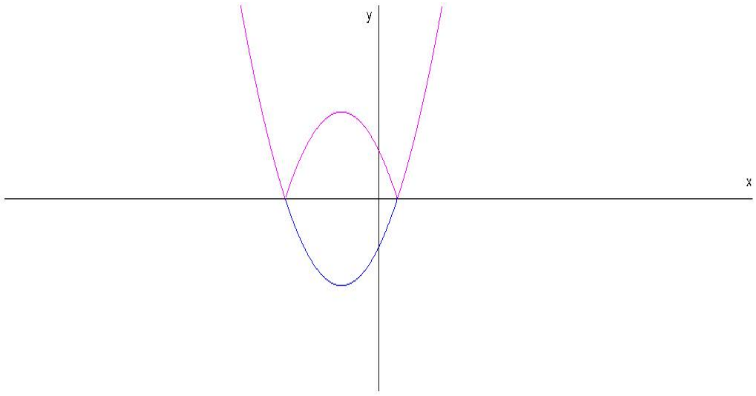
$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} -(x^2 + 4x - 5) & \text{si} & x^2 + 4x - 5 \leq 0 \\ x^2 + 4x - 5 & \text{si} & x^2 + 4x - 5 > 0 \end{array}\right.$$

Dibujamos la gráfica de la función auxiliar $g(x) = x^2 + 4x - 5$:

Esta función corta a los ejes en los puntos $(0, -5)$, $(-5, 0)$ y $(1, 0)$. Y tiene un mínimo en $(-2, -9)$

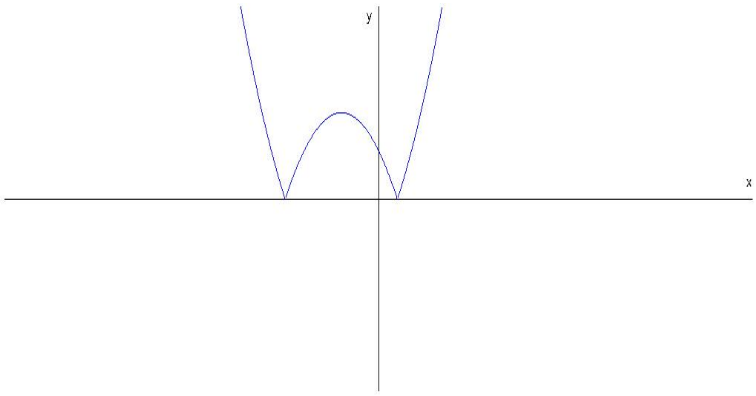


La función $f(x) = |g(x)|$ convertirá la parte negativa de $g(x)$ en positiva:



Esta función corta a los ejes en los puntos $(0,5)$, $(-5,0)$ y $(1,0)$. Y tiene un máximo en $(-2,9)$

En conclusión:



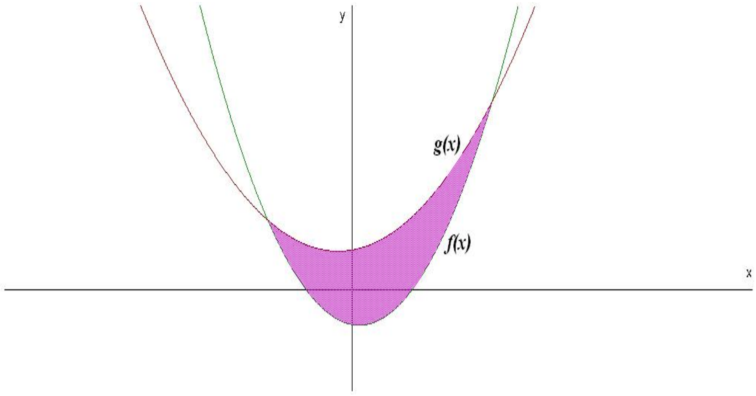
$$f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si} & x\le -5\\ -g(x) & \text{si} & -5<x\le 1\\ g(x) & \text{si} & x>1\end{cases} = \begin{cases} x^2+4x-5 & \text{si} & x\le -5\\ -(x^2+4x-5) & \text{si} & -5<x\le 1\\ x^2+4x-5 & \text{si} & x>1\end{cases}$$

A la vista de la gráfica está claro que que la función f es continua en R y derivable en $R-\{-5,1\}$. La función no es derivable en $x=-5$ y en $x=1$ porque en ellos podríamos trazar infinitas tangentes (hay picos).

Problema 5 Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=2x^2-x-7$ y $g(x)=x^2+x+8$.

Solución:

$$f(x)=g(x)\Longrightarrow 2x^2-x-7=x^2+x+8\Longrightarrow x^2-2x-15=0\Longrightarrow x=-3,\ \ x=5$$



$$S_1 = \int_{-3}^{5} (f(x) - g(x)\, dx = \int_{-3}^{5} (x^2 - 2x - 15))\, dx = \left. \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x \right]_{-3}^{5} = -\frac{256}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{252}{3} = 85,33 \ u^2$$