Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)

Abril 2011

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$

Se pide:

1. Calcular su dominio.
2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
8. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 2$.
9. Representación gráfica.
10. Calcular el área encerada por la función, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Solución:

1. $\text{Dom}(f) = R - \{1\}$
2. Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -3)$ y con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 3 = 0$, esta ecuación no tiene solución y por tanto la función no corta el eje OX.
3.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. La función no es ni PAR ni IMPAR
5. - Asíntotas:

- Verticales: En $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No tiene

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - x\right) = 1$$

$$y = x + 1$$

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x^2-2x-3 = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1, 1) \cup (1, 3)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo en el punto $(3, 6)$.

7. Intervalos de concavidad y covexidad:

$$f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3} \neq 0$$

La función f no tiene puntos de inflexión.

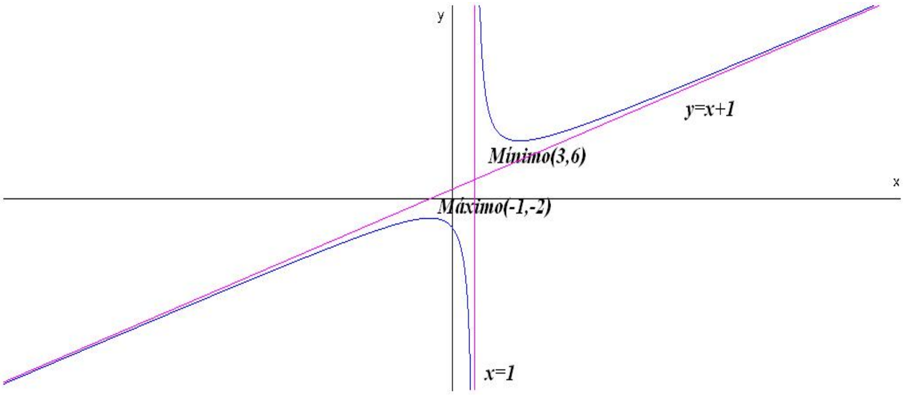
	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

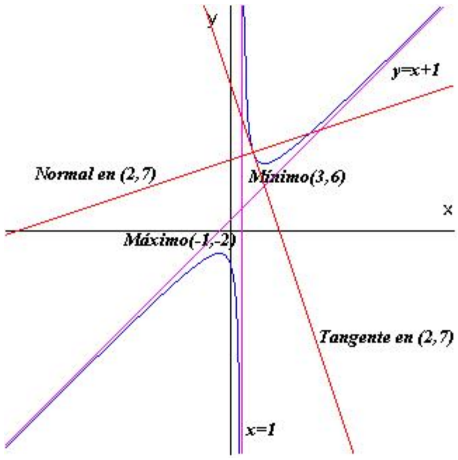
8. En $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 7$ y $m = f'(2) = -3$:

   Recta tangente: $y - 7 = -3(x - 2)$

   Recta normal: $y - 7 = \dfrac{1}{3}(x - 2)$

9. Representación gráfica

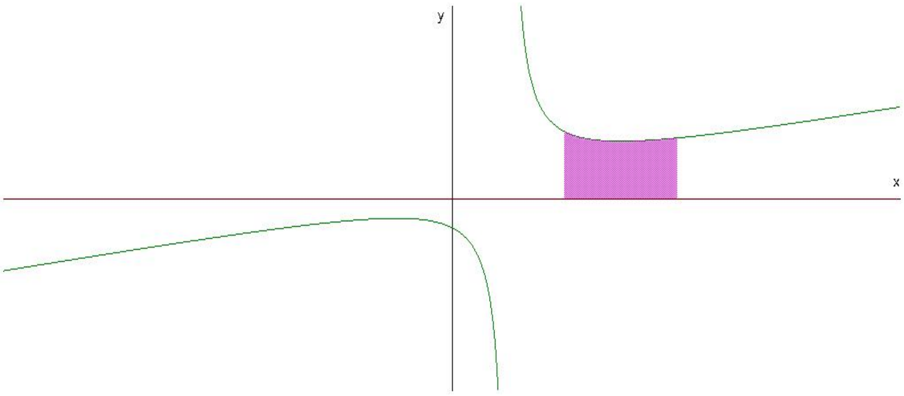




10. Calcular el siguiente área:

$$S = \int_2^4 \frac{x^2+3}{x-1}\,dx = \int_2^4 \left(x + 1 + \frac{4}{x-1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x-1|\Big]_2^4 = 8 + 4\ln 3 = 12,39\ u^2$$


y
x