Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Octubre 2008

Problema 1 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x- & y- & z=1 \\ x+ & y+ & z=2 \\ 2x- & 2y- & 2z=-1 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y- & z=1 \\ 3x- & y+ & z=0 \\ x+ & y- & 2z=1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x- & y- & z=1 \\ x+ & y+ & z=2 \\ 2x- & 2y- & 2z=-1 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3/4 \\ y=5/4-z \\ z=z \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y- & z=1 \\ 3x- & y+ & z=0 \\ x+ & y- & 2z=1 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1/4 \\ y=3/4 \\ z=0 \end{array}\right.$$

Problema 2 Resolver las ecuaciones:

1. $\ln(1-x)-\ln x=1$
2. $\log(5-x^2)-\log x=1+\log(x+1)$
3. $\log x-\log(x^2-2)=1-\log x$

Solución:

1. $\ln(1-x)-\ln x=1 \Longrightarrow \ln\dfrac{(1-x)}{x}=\ln e \Longrightarrow$

   $1-x=ex \Longrightarrow x=\dfrac{1}{e+1}=0,2689414213.$

2. $\log(5-x^2)-\log x=1+\log(x+1) \Longrightarrow \log\dfrac{5-x^2}{x}=\log 10(x+1) \Longrightarrow$ $11x^2+10x-5=0 \Longrightarrow x=0{,}3585701736,\ x=-1{,}267661082$(no vale).

3. $\log x-\log(x^2-2)=1-\log x \Longrightarrow \log\dfrac{x^2}{x^2-2}=\log 10 \Longrightarrow 9x^2=20 \Longrightarrow x=1,490711984;\ x=-1,490711984$(no vale).

Problema 3 Resolver el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{c} x \cdot y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{c} x \cdot y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 2,\ \ y = 1 \\ x = -1/2,\ y = -4 \end{array}\right.$$

Problema 4 Resolver las inecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{x}{3} \geq 1 - \dfrac{x}{2}$

2. $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + x - 2} \leq 0$

Solución:

1. $\dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{x}{3} \geq 1 - \dfrac{x}{2} \Longrightarrow \left[\dfrac{9}{10}, +\infty\right)$

2. $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + x - 2} \leq 0 \Longrightarrow [-3, -2) \cup (1, 5]$

Problema 5 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{3x^3 + 2x - 1}{2x^3 + 2}$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 - 3x - 1}$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^4 + 1}{x^3 + x - 1}$

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{5x^2 - x - 1}{5x^2}\right)^{x+1}$

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x^3 + x + 1}{x^3 + 3}\right)^{\frac{x^2+1}{2}}$

6. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{2x^2 - 1}\right)^{2x}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{3x^3 + 2x - 1}{2x^3 + 2} = \dfrac{3}{2}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2+x+1}{x^3-3x-1} = 0$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^4+1}{x^3+x-1} = \infty$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{5x^2-x-1}{5x^2}\right)^{x+1} = e^{-1/5}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^3+x+1}{x^3+3}\right)^{\frac{x^2+1}{2}} = \infty$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-1}\right)^{2x} = 0$

Problema 6 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^4-x^3+3x^2-3}{x^3+x^2-x-1}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

3. $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$

4. $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3+x^2-5x-2}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-x}{x+1}$

6. $\lim_{x\longrightarrow 5} \dfrac{3-\sqrt{x^2-16}}{x-5}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^4-x^3+3x^2-3}{x^3+x^2-x-1} = \dfrac{7}{4}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = 0$

3. $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} = 2$

4. $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3+x^2-5x-2} = \dfrac{5}{11}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-x}{x+1} = 0$

6. $\lim\limits_{x \longrightarrow 5} \dfrac{3-\sqrt{x^2-16}}{x-5} = -\dfrac{5}{3}$