Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Enero 2009

Problema 1 Sean $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = -1 + 2i$. Calcular: $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ y $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Solución:

- $z_1 + z_2 = 1 + 3i$
- $z_1 \cdot z_2 = -4 + 3i$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = -i$

Problema 2 Resolver la ecuación $z^4 + 1 - i = 0$

Solución:

$$z^4 + 1 - i = 0 \Longrightarrow z = \sqrt[4]{-1+i} = \sqrt[8]{(2)_{135^o}} =$$

$$\begin{cases} \sqrt[8]{2}_{\frac{135^o + 0^o}{4}} = \sqrt[8]{2}(\cos 33^o45' + i \sin 33^o45') \\ \sqrt[8]{2}_{\frac{135^o + 360^o}{4}} = \sqrt[8]{2}(\cos 123^o45' + i \sin 123^o45') \\ \sqrt[8]{2}_{\frac{135^o + 720^o}{4}} = \sqrt[8]{2}(\cos 213^o45' + i \sin 213^o45') \\ \sqrt[8]{2}_{\frac{135^o + 1080^o}{4}} = \sqrt[8]{2}(\cos 303^o45' + i \sin 303^o45') \end{cases}$$

Problema 3 Resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

1.
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y - z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y - 2z = -2 \end{cases}$$

Solución:

1.
$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 2 \\ & y- & z= & 1 \\ 2x+ & y & = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{array}\right. , \text{ (S.C.D)}$$

2.
$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z= & 4 \\ 2x+ & y- & z= & 2 \\ x- & y- & 2z= & -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. , \text{ (S.C.I)}$$

Problema 4 Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\log(x^2-x)-\log(x+1)=1$
2. $3^{2x}-3^{x+1}+2=0$

Solución:

1. $\log(x^2-x)-\log(x+1)=1 \Longrightarrow x^2-11x-10=0 \Longrightarrow x=11,844$ y $x=-0,844$. Las dos soluciones son válidas
2. $3^{2x}-3^{x+1}+2=0 \Longrightarrow t^2-3t+2=0 \Longrightarrow t=2$ y $t=1 \Longrightarrow x=0,6309$ y $x=0$.

Problema 5 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{2x^3-2x^2-8}{x^2-x-2}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{x-3}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+1})$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{x^3-2\sqrt{x}+1}{3x^3+x-1}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x-1}$
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x^2+3}{3x^2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{2x^3-2x^2-8}{x^2-x-2}=\dfrac{16}{3}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{x-3}=\dfrac{5}{4}$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}) = -\dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^3 - 2\sqrt{x} + 1}{3x^3 + x - 1} = \dfrac{1}{3}$

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x+1}{x} \right)^{2x-1} = e^2$

6. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x^2 + 3}{3x^2} \right)^{\frac{x+1}{2}} = 0$

Problema 6 Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $y = (3x^2 - x + 1)^8$
2. $y = \sin(2x - 1) \cdot \ln(2x - 1)$
3. $y = e^{\cos 2x}$
4. $y = \ln \left(\dfrac{\cos x}{x^2 + 1} \right)$
5. $y = \dfrac{\sin(x^2 + 1)}{e^x}$
6. $y = \tan(x^2 + 1)$
7. $y = 7^{x \sin x}$
8. $y = \log_5 \left(\dfrac{x^2 - 1}{x + 8} \right)$
9. $y = (x^2 + 2)^{x+1}$

Solución:

1. $y' = 8(3x^2 - x + 1)^7(6x - 1)$
2. $y' = 2\cos(2x - 1) \cdot \ln(2x - 1) + \sin(2x - 1) \cdot \dfrac{2}{2x - 1}$
3. $y' = -2 \sin 2x e^{\cos 2x}$
4. $y' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} - \dfrac{2x}{\cos x^2 + 1}$
5. $y' = \dfrac{2x \cos(x^2 + 1) \cdot e^x - \sin(x^2 + 1) \cdot e^x}{e^{2x}}$
6. $y' = \dfrac{2x}{\cos^2(x^2 + 1)}$

7. $y' = (\sin x + x\cos x)7^{x\sin x}\ln 7$

8. $y' = \dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 5} - \dfrac{1}{(x+8)\ln 5}$

9. $y' = (x^2+2)^{x+1}\left(\ln(x^2+2) + \dfrac{2x(x+1)}{x^2+2}\right)$

Problema 7 Calcular las rectas tangente y normal de la siguientes funciones en $x = 2$:

1. $f(x) = e^{x^2-1}$

2. $f(x) = x^2 - x + 1$

3. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Solución:

1. $f(x) = e^{x^2-1} \Longrightarrow f(2) = e^3,\ (2, e^3)$ y $f'(x) = 2xe^{x^2-1} \Longrightarrow m = f'(2) = 4e^3$

   Recta Tangente: $y - e^3 = 4e^3(x-2)$

   Recta Normal: $y - e^3 = -\dfrac{1}{4e^3}(x-2)$

2. $f(x) = x^2 - x + 1 \Longrightarrow f(2) = 3,\ (2,3)$ y $f'(x) = 2x - 1 \Longrightarrow m = f'(2) = 3$

   Recta Tangente: $y - 3 = 3(x-2)$

   Recta Normal: $y - 3 = -\dfrac{1}{3}(x-2)$

3. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \Longrightarrow f(2) = \dfrac{5}{3},\ \left(2, \dfrac{5}{3}\right)$ y $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} \Longrightarrow m = f'(2) = -\dfrac{8}{9}$

   Recta Tangente: $y - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{8}{9}(x-2)$

   Recta Normal: $y - \dfrac{5}{3} = \dfrac{9}{8}(x-2)$