Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Junio 2009

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ x^3 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ x^2 + 2 & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$$

en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

En $x = 0$ es continua, en $x = 1$ hay una discontinua evitable(agujero) y en $x = 2$ es discontinua no evitable (salto).

Problema 2 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} & \text{si} \quad x < 2 \\ \\ \dfrac{2x}{x-1} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

en toda la recta real.

Solución:

En $x = 2$ es continua, en $x = 1$ hay una discontinua no evitable(salto).

Problema 3 Calcular el valor de k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - \sin(x-1) + k + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^3 + kx^2 - lnx + 2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (x^3 + kx^2 - lnx + 2) = k + 3 \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (kx^2 - \sin(x-1) + k + 1) = 2k + 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$2k + 1 = k + 3 \Longrightarrow k = 2$$

Problema 4 Calcular a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2bx + 3 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + 2ax - b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable.

Solución:

Para que sea continua:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (x^2 + 2ax - b) = 2a - b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2 - 2bx + 3) = a - 2b + 3 \end{cases}\right\} \Longrightarrow$$

$$a - 2b + 3 = 2a - b + 1 \Longrightarrow a + b = 2$$

Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + 2a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \left.\begin{cases} f'(1^-) = 2a - 2b \\ f'(1^+) = 2 + 2a \end{cases}\right\} \Longrightarrow$$

$$2a - 2b = 2 + 2a \Longrightarrow b = -1$$

Luego:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Problema 5 Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función, esbozando su representación gráfica:

$$f(x) = |x^2 + 3x - 10|$$

Solución:

1. Se trata de una función por ramas

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 + 3x - 10) & \text{si} \quad x^2 + 3x - 10 < 0 \\ x^2 + 3x - 10 & \text{si} \quad x^2 + 3x - 10 \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 10 & \text{si} \quad x \leq -5 \\ -(x^2 + 3x - 10) & \text{si} \quad -5 < x \leq 2 \\ x^2 + 3x - 10 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

2. Habrá que estudiar la continuidad de f en $x = -5$ y en $x = 2$. En el resto de puntos de R es continua:

- en $x=-5$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -5^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -5^-}(x^2+3x-10)=0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -5^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -5^+}[-(x^2+3x-10)]=0 \\ \\ f(-5)=0 \end{cases}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x=-5$$

- en $x=2$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+}(x^2+3x-10)=0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-}[-(x^2+3x-10)]=0 \\ \\ f(2)=0 \end{cases}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x=2$$

- En conclusión la función es continua en toda la recta real.

3. Habrá que estudiar la derivabilidad de f en $x=-5$ y en $x=2$. En el resto de puntos de R es derivable:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si} & x\le -5 \\ -2x+3 & \text{si} & -5<x\le 2 \\ 2x+3 & \text{si} & x\ge 2 \end{cases}$$

- en $x=-5$

$$\left.\begin{cases} f'(-5^-)=-7 \\ f'(-5^+)=7 \end{cases}\right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x=-5$$

- en $x=2$

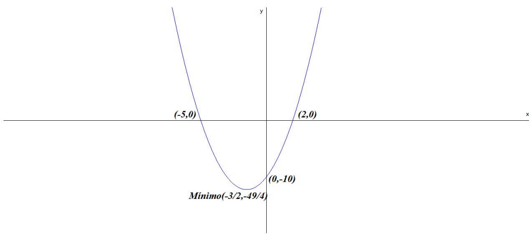
$$\left.\begin{cases} f'(2^-)=-7 \\ f'(2^+)=7 \end{cases}\right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x=2$$

- En conclusión la función es derivable en todos los puntos de R distintos de $x=2$ y $x=-5$ donde no lo es.

4. Representación:

- Analizamos la función $f(x)=x^2+3x-10$
  - Puntos de corte: $(0,-10)$, $(2,0)$, $(-5,0)$
  - Monotonía: $f'(x)=2x+3=0 \Longrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$

	$(-\infty,-3/2)$	$(-3/2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece



- Curvatura: $f''(x) = 2 > 0$ siempre, luego la curva es cóncava.

- La función $f(x) = |x^2+3x-10|$ será igual que la anterior pasando todo lo que está por debajo del eje de abcisas a su correspondiente simétrico por encima del eje, es decir:
  - Puntos de corte: $(0, 10)$, $(2, 0)$, $(-5, 0)$
  - Extremos: La función tiene un máximo en el punto $(-3/2, -49/4)$