

Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Mayo 2009

Problema 1 Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Su signo.
4. Simetrías.
5. Asíntotas.
6. Monotonía.
7. Máximos y Mínimos.
8. Curvatura y puntos de inflexión
9. Representación gráfica aproximada.
10. Rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 2$
11. Área comprendida entre la función y las rectas $x = -1/2$, $x = 1/2$ e $y = 0$.

Solución:

1. $Dom f = R - \{-1, 1\}$

2. Con el eje OY : $(0, 0)$

Con el eje OX : $f(x) = 0 \implies (0, 0)$.

3.

$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
-	+	-	+

4.

$$f(-x) = -\frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Luego es impar.

5. ■ **Verticales:** $x = 1$ y $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Luego no hay

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = 0$$

$$y = x$$

- 6.

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0$$

$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
+	-	+
creciente	decreciente	creciente

7. Máximo en el punto $\left(-\sqrt{3}, -\frac{(\sqrt{3})^3}{2}\right)$

Mínimo en el punto $\left(\sqrt{3}, \frac{(\sqrt{3})^3}{2}\right)$

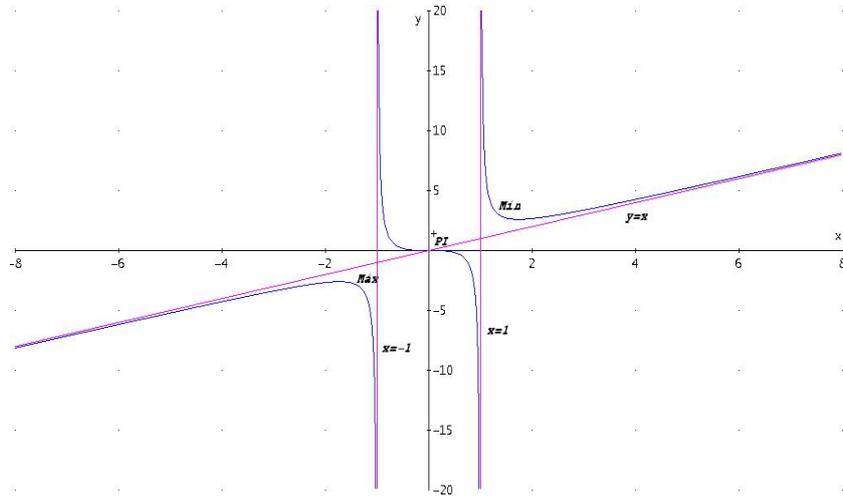
- 8.

$$f''(x) = \frac{x(2x^2 + 6)}{(x^2 - 1)^3}$$

$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
-	+	-	+
convexa	cóncava	convexa	cóncava

En $x = -1$ y en $x = 1$ la función tiene asíntotas y, por tanto, no pueden ser puntos de inflexión.

9. Representación:



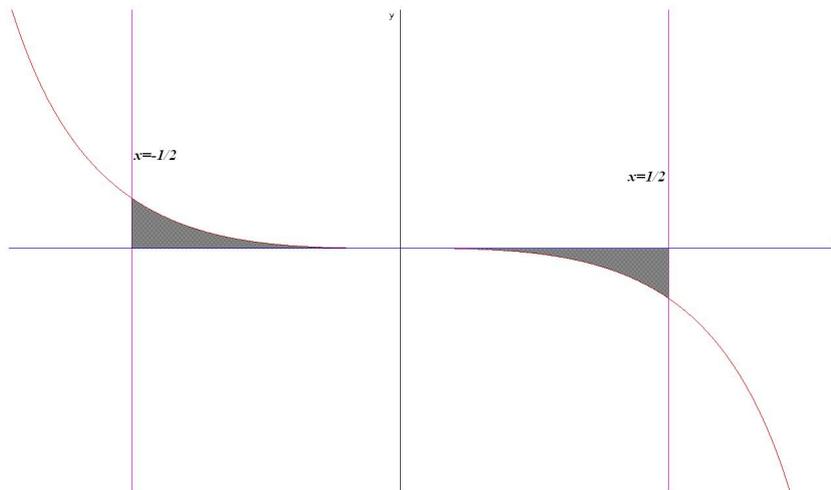
10.

$$x = 2 \implies f(2) = \frac{8}{3}, \quad m = f'(2) = \frac{4}{9}$$

$$\text{Recta Tangente: } y - \frac{8}{3} = \frac{4}{9}(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal: } y - \frac{8}{3} = -\frac{9}{4}(x - 2)$$

11. Área:



$$F(x) = \int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\ln(x^2 - 1)}{2} + C$$
$$\int_{-1/2}^0 \frac{x^3}{x^2 - 1} dx = \left. \frac{x^2}{2} + \frac{\ln(x^2 - 1)}{2} \right]_{-1/2}^0 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} = 0,018841$$
$$S = 2 \cdot 0,018841 = 0,03768207 u^2$$