

Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2009

Problema 1 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 2x - 1})$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2} \right)^{x+1}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 2x - 1}) = \frac{3}{2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2} \right)^{x+1} = e^{-1}$

Problema 2 Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $y = (\cos x)^x$

2. $y = \ln \left(\frac{\cos x + 1}{\sin x} \right)$

3. $y = \arctan(x^3 - 5)$

Solución:

1. $y = (\cos x)^x \implies y' = (\cos x)^x \left(\ln(\cos x) - \frac{x \sin x}{\cos x} \right)$

2. $y = \left(\frac{\cos x + 1}{\sin x} \right) = \ln(\cos x + 1) - \ln(\sin x) \implies$

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x + 1} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

3. $y = \arctan(x^3 - 5) \implies y' = \frac{3x^2}{1 + (x^3 - 5)^2}$

Problema 3 Calcular las siguientes integrales:

1. $\int x e^{5x^2-1} dx$

2. $\int x e^x dx$

$$3. \int \frac{5x}{x^2 + 8} dx$$

Solución:

$$1. \int x e^{5x^2-1} dx = \frac{e^{5x^2-1}}{10} + C$$

$$2. \int x e^x dx = e^x(x-1) + C$$

$$3. \int \frac{5x}{x^2 + 8} dx = \frac{5}{2} \ln|x^2 + 8| + C$$

Problema 4 Calcular las rectas tangente y normal de las siguientes funciones

$$1. f(x) = \frac{e^x}{x+2} \text{ en } x = 0$$

$$2. f(x) = \frac{\ln x}{x+5} \text{ en } x = 1$$

Solución:

$$1. f'(x) = \frac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} \implies f'(0) = \frac{1}{4} \text{ y } f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Recta Tangente: } y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x$$

$$\text{Recta Normal: } y - \frac{1}{2} = -4x$$

$$2. f'(x) = \frac{x+5 - x \ln x}{x(x+5)^2} \implies f'(1) = \frac{1}{6} \text{ y } f(1) = 0$$

$$\text{Recta Tangente: } y = \frac{1}{6}(x-1)$$

$$\text{Recta Normal: } y = -6(x-1)$$