

Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2008

Problema 1 Resolver la siguiente ecuación trigonométrica

$$\cos 2x + \cos x = 0$$

Solución:

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0 &\implies \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = 0 \implies \\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 &\implies (t = \cos x) \implies 2t^2 + t - 1 = 0 \implies t = -1, \quad t = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\cos x = \begin{cases} \frac{1}{2} \implies \begin{cases} x = 60^\circ + 2k\pi \\ x = 300^\circ + 2k\pi \end{cases} \\ -1 \implies x = 180^\circ + 2k\pi \end{cases}$$

Problema 2 Si $z = 2 - 4i$, y $w = -1 + i$ calcular:

- $z + w$, $z \cdot w$ y z/w .
- z^9
- las raíces de $\sqrt[4]{w}$

Solución:

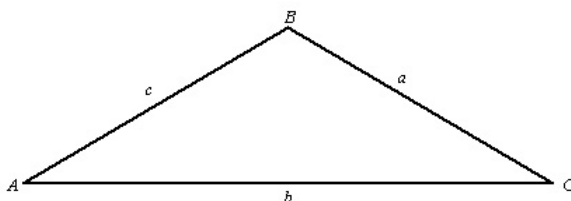
- $z + w = 1 - 3i$, $z \cdot w = 2 + 6i$ y $\frac{z}{w} = -3 + i$.
- $z = \sqrt{20}_{296^\circ 33' 54''} \implies z^9 = (\sqrt{20})^9_{149^\circ 5' 6''} = (\sqrt{20})^9(\cos 149^\circ 5' 6'' + i \sin 149^\circ 5' 6'')$
- $w = \sqrt{2}_{135^\circ}$:

$$\sqrt[4]{w} = \begin{cases} \sqrt[8]{2}_{33^\circ 45'} = \sqrt[8]{2}(\cos 33^\circ 45' + i \sin 33^\circ 45') \\ \sqrt[8]{2}_{123^\circ 45'} = \sqrt[8]{2}(\cos 123^\circ 45' + i \sin 123^\circ 45') \\ \sqrt[8]{2}_{213^\circ 45'} = \sqrt[8]{2}(\cos 213^\circ 45' + i \sin 213^\circ 45') \\ \sqrt[8]{2}_{303^\circ 45'} = \sqrt[8]{2}(\cos 303^\circ 45' + i \sin 303^\circ 45') \end{cases}$$

Problema 3 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen: $a = 10$ cm, $b = 4$ cm y $C = 35^\circ$.

Solución:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 100 + 16 - 80 \cos 35^\circ = 7,104 \text{ cm}$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \implies \cos A = -0,59 \implies A = 126^\circ 15' 16''$$

Otra manera:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \implies \frac{7,104}{\sin 35^\circ} = \frac{10}{\sin A} \implies A = 53^\circ 50' 33''$$

La calculadora nos dá como resultado $A = 53^\circ 50' 33''$, pero este resultado no es válido dado que, el ángulo A tiene que ser obtuso, lo que corresponde al ángulo $180^\circ - 53^\circ 50' 33'' = 126^\circ 9' 27''$

$$B = 180^\circ - (A + C) = 18^\circ 49' 43''$$

$$S\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 11,63 \text{ cm}^2$$

donde $p = \frac{a+b+c}{2}$

Problema 4 Dos aeropuertos A y B reciben la señal de un avión, que está pidiendo un aterrizaje forzoso por la avería de uno de sus motores. El aeropuerto A recibe la señal con un ángulo de 35° y el B con 20° , ambos medidos con la horizontal. Si los aeropuertos están separados por una distancia de 200 Km , calcular la distancia desde cada aeropuerto al avión.

Solución:

$$C = 180^\circ - (35^\circ + 20^\circ) = 125^\circ$$

$$\frac{200}{\sin 125^\circ} = \frac{a}{\sin 35^\circ} \implies a = 140,0415 \text{ Km}$$

$$\frac{200}{\sin 125^\circ} = \frac{b}{\sin 20^\circ} \implies b = 83,5059 \text{ Km}$$

Problema 5 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$, sabiendo que $\tan \alpha = 2$

Solución:

$$\tan \alpha = 2 \implies \cot \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha \implies \sec \alpha = -\sqrt{5} \implies \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha \implies \csc \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2} \implies \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$