Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Junio 2008

Problema 1 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+x}\right)$

2. $\lim_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{x-3}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+x}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

2. $\lim_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{x-3}=\dfrac{5}{4}$

Problema 2 Calcular a y b para que la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} 3ax^3-2bx^2+3 & \text{si} & x<1 \\ ax^2+bx-1 & \text{si} & x\geq 1\end{array}\right.$$

sea continua y derivable.

Solución:

Para que sea continua:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1}(3ax^3-2bx^2+3)=3a-2b+3 \\ \\ \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1}(ax^2+bx-1)=a+b-1\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$a+b-1=3a-2b+3\Longrightarrow 2a-3b+4=0$$

Para que sea derivable:

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{lll} 9ax^2-4b & \text{si} & x<1 \\ 2ax+b & \text{si} & x\geq 1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} f'(1^-)=9a-4b \\ f'(1^+)=2a+b\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$9a-4b=2a+b\Longrightarrow 7a-5b=0$$

Luego:

$$\left\{\begin{array}{c} 2a-3b+4=0 \\ 7a-5b=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=20/11 \\ b=28/11\end{array}\right.$$

Problema 3 Calcula la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x^2 - 2x}{x+1}\right)$

2. $f(x) = \csc \dfrac{x^2 - 1}{x+2}$

Solución:

1. $$f'(x) = \frac{6x-2}{3x^2-2x} - \frac{1}{x+1}$$

2. $$f'(x) = -\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} \cot \frac{x^2-1}{x+2} \csc \frac{x^2-1}{x+2}$$

Problema 4 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes.
2. Dominio de definición.
3. Signo de la función.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
7. Extremos.
8. Curvatura y puntos de Inflexión.
9. Representación aproximada.
10. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a esta gráfica en el punto de abcisa $x = 1$

Solución:

1. $$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$
   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow (-1, 0), \quad (1, 0)$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No Hay.

2. $Dom(f) = R - \{0\}$

3.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1+\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

4. $f(-x) = f(x) \Longrightarrow$ Es PAR.

5. Asíntotas:

   - **Verticales:**

     $x = 0$:
     $$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{array}\right.$$

   - **Horizontales:** $y = 1$
     $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1$$

   - **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

6.
$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay extremos}$$

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

Decrece: $(-\infty,0)$

Crece: $(0,+\infty)$

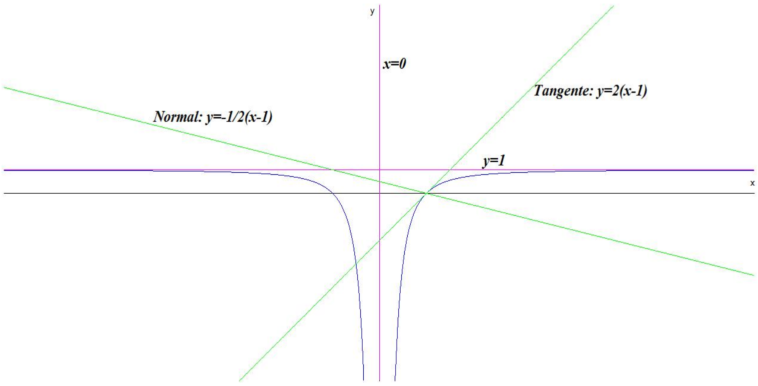
7. No hay ni máximos ni mínimos.

8.
$$f''(x) = -\frac{6}{x^4} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay puntos de inflexión}$$

Tenemos que $f''(x) < 0$ siempre, luego es convexa en todo el dominio.

Convexa: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

9. Representación



10.

$$x = 1 \Longrightarrow f(1) = 0, \ \ m = f'(1) = 2$$

$$y = 2(x-1) \ \text{ tangente}, \ \ y = -\frac{1}{2}(x-1) \ \text{ normal}$$