Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Junio 2008

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes.
2. Dominio de definición.
3. Signo de la función.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
7. Extremos.
8. Curvatura y puntos de Inflexión.
9. Representación aproximada.
10. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a esta gráfica en el punto de abcisa $x = 1$

Solución:

1.
$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$
   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0)$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$.
2. $Dom(f) = R - \{-1\}$
3.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. $f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ No hay simetrías.
5. Asíntotas:

- **Verticales:**

$x = -1$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

- **Horizontales:** No Hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^3 + 2x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} - x\right) = -2$$

$$y = x - 2$$

6.

$$f'(x) = -\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0,\;\; x = -3$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Crece	Decrece	Crece

Crece: $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$

Decrece: $(-3, -1)$

7. La función tiene un máximo en el punto $(-3, -27/4)$ donde pasa de crecer a decrecer, en $x = 0$ no hay ni máximo ni mínimo, porque no cambia la monotonía.

8.

$$f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

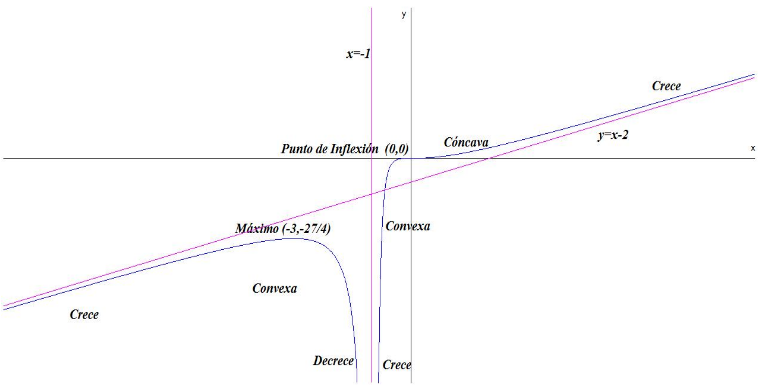
Como el denominador es siempre positivo, tendremos que estudiar el signo del numerador.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

Convexa: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

Cóncava: $(0, \infty)$

9. Representación



10.

$$x = 1 \Longrightarrow f(1) = \frac{1}{4}, \;\; m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}(x - 1) \;\; \text{tangente}, \;\; y - \frac{1}{4} = -2(x - 1) \;\; \text{normal}$$