Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Junio 2008

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-4}$, calcule:

1. Corte con los ejes.
2. Dominio de definición.
3. Signo de la función.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
7. Extremos.
8. Curvatura y puntos de Inflexión.
9. Representación aproximada.
10. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a esta gráfica en el punto de abcisa $x = 3$

Solución:

1. $$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}$$
   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 + 2 = 0 \Longrightarrow$ no hay.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -1/2)$.
2. $Dom(f) = R - \{\pm 2\}$
3.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2+\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

4. $f(-x) = f(x) \Longrightarrow$ Es PAR.
5. Asíntotas:

- **Verticales:**

  $x = 2$ y $x = -2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\dfrac{6}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \dfrac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\dfrac{6}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} \dfrac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\dfrac{6}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} \dfrac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\dfrac{6}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x^2-4} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

6.

$$f'(x) = -\frac{12x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Crece	Decrece

Crece: $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

Decrece: $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

7. La función tiene un máximo en el punto $(0, -1/2)$ donde pasa de crecer a decrecer.

8.

$$f''(x) = \frac{12(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay puntos de inflexión}$$

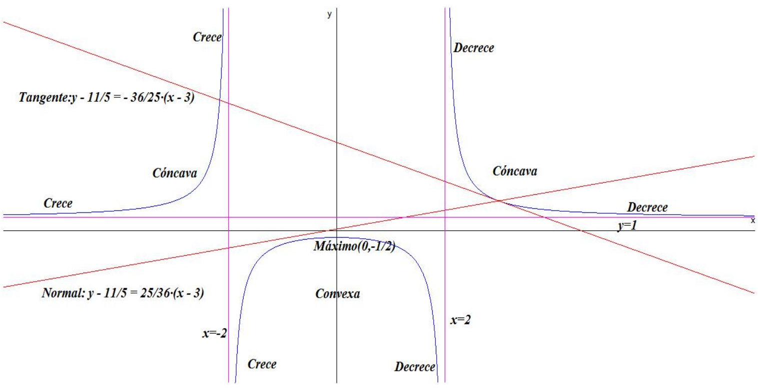
Como el numerador es siempre positivo, tendremos que estudiar el signo del denominador.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

Cóncava: $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

Convexa: $(-2,2)$

9. Representación



10.

$$x=3\Longrightarrow f(3)=\frac{11}{5},\;\; m=f'(3)=-\frac{36}{25}$$

$$y-\frac{11}{5}=-\frac{36}{25}(x-3)\;\text{ tangente},\;\; y-\frac{11}{5}=\frac{25}{36}(x-3)\;\text{ normal}$$